コホモロジー

cohomology

安藤哲哉
編

日本評論社

はじめに

本書は平成 13 年 10 月 13 日，20 日に千葉大学で開催された公開講座「コホモロジー」をもとに加筆したもので，20 世紀半ばに登場したコホモロジーという新しい道具を，新しい計算手段として，わかりやすく社会人や高校生等に解説しようとするものである．

最初，コホモロジーは，多様体とよばれる図形の性質を調べるために考案された計算手段であった．そして，それが微積分と関連づけられることがわかり，幾何学では必要不可欠な計算手段になった．幾何学で考案されたコホモロジーは，少し工夫すると代数学にも応用できることが発見され，代数学のいろいろな分野で，いろいろな種類のコホモロジーが考案され，実用化された．解析学では，多変数関数論や代数解析学という分野で，コホモロジーが活躍している．

コホモロジーを使った計算は，ある意味で簡単なものであり，多くの場面で，公式を用いて，機械的に計算することができる．そういうわけで，数学者にとって，コホモロジーは有用な計算道具であり，微積分同様に，現在では必要不可欠なものになっている．

我々は，小学校以来，いろいろな「計算」を学習してきた．最初は，数の四則計算を勉強し，扱う数も，自然数，小数，分数，負の数，無理数，複素数とだんだん拡張していった．また，計算の対象は「数」だけでなく，中学では「文字式」の計算を学び，高校では「関数」や「ベクトル・行列」の計算も教わった．

「計算」は，抽象化することによって，より普遍的で応用の広いものになる．たとえば，文字式は単に数の代用物ではなく，

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$$

という公式でも，これを，数式ではなく文字式で表すことによって，いろいろな応用のきく等式になるのである．

また,「計算」の対象も,複雑で抽象化されたものに広げることによって,高いレベルの応用の道が開けてくる.たとえば,関数の計算

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right), \qquad \frac{d}{dx}\sin x = \cos x$$

は,日常生活ではめったに使われないであろうが,理工学では,必要不可欠な計算である.逆にいうと,科学の水準が上昇するにつれて,より高度な数学が必要になってくるのである.

「ベクトル」にしても,ケーリー (1821-1895) が定義したように,単に数を並べたもの $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ と考えているうちは,あまり有用なものではなかった.数学でベクトルの考え方の卓越性が認識されたのは 20 世紀半ばのことであり,それは,関数の集合において,関数を無限次元のベクトルと考えると,関数を幾何学的に扱えることがわかったからである.

このように,「計算」という言葉は,数以外のいろいろな対象に対して用いられるようになってきたが,コホモロジーも一種の計算で,それは

$$H^i(X,\ R)$$

という記号で表される.ここには,i, X, R という 3 つの変数があり,i には 0, 1, 2,$\cdots$ という整数が代入できる.X と R にはいろいろなものが代入でき,最初に考案された多様体のコホモロジーでは,X には多様体とよばれる図形が代入でき,R には整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ のような環とよばれるものが代入できた.そして,コホモロジー $H^i(X, R)$ の値は加群というものになり,それが図形の形状を記述するのに重要なデータである.

ところで,世の中には,微分・積分と聞いただけで拒絶反応を示す人も多い.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{ka + (n-k)b}{n}\right) \cdot \frac{b-a}{n}$$

という定義式をいきなり突き付けられたら,確かに逃げ出したくなるだろう.ところが,日常,微積分の計算を行っている人でも,こういう定義式を忘れてしまっている人は少なくなく,大抵の場合は,

$$(fg)' = f'g + fg', \quad (f(g(x)))' = g'(x)f'(g(x))$$

等の公式を機械的に適用して答を導いているにすぎないことが多い.

このことは,「計算」の本質をかなり的確に表していて,「計算は概念の定義を知らなくても，公式の適用により機械的に答が得られる」という特徴を持つ．コホモロジーの計算も同様で，コホモロジーの定義は難解であるが，計算は公式の適用により機械的にできるようになっている.

数学者は，定義を理解させてから計算方法を教えようとするが，大衆教育の見地から言えば，微積分のように定義が難しい場合，次善の策として，まずは，計算方法を教えて反復練習させ，計算がすらすら行えるようになったら，改めて定義や概念を教える，という方法もある.「数」の計算にしても，一部の数学者などを除けば，数の定義を正確に知っていて，それをもとに公式を証明して導いたわけではない．たとえば,

$$(a + b) \times c = a \times c + b \times c \tag{1}$$

$$(A \oplus B) \otimes C = A \otimes C \oplus B \otimes C \tag{2}$$

という 2 つの分配法則の公式を比較してみよう．(2) は加群の直和とテンソル積に関する公式で，演算 $\oplus, \otimes$ の概念や，この公式の証明を理解できる人は，数学科の学生でもあまり多くはない．それでは，数の分配法則 (1) の証明は簡単かというと，そうではなく，たとえば，ペアノの公理によって数を定義し，それに基づいて (1) を証明しようとすると，(2) を述べるより多くのページ数を必要とし，正統的方法で講義すると，数学科の学生でもほとんど理解してくれない．なぜ，多くの人が (1) は易しく，(2) は難しく感じるかというと，(1) は小学校以来いつも使ってきた公式で馴染があるのに対し，(2) は一度も使ったことがない別世界の公式だからである．しかし，何十年も (2) を使って計算している数学者にとっては，その証明がすぐに思い出せなくなってしまっても，(2) は当たり前の公式になっている.

これは,「計算」のもう 1 つの本質であり,「計算は理屈はわからなくても，何度も繰り返して行っていると，それがだんだん当たり前のことのように感じるようになってくる」ものなのである.

ただ，コホモロジーの計算は $0 \to A \to B \to C \to \cdots$ というように，矢印

$\to$ を用いて行われることが多い．ここで，A, B, C,$\cdots$ は加群や層とよばれる大学以降で学習するものであり，矢印 $\to$ は準同型写像で $0 \to A \to B \to C \to \cdots$ は完全系列とよばれるものである．このように，コホモロジーの計算を行うためには，加群や準同型写像という新しい概念が必要になってくる．しかし，その定義をきちんと勉強し，さらにコホモロジー $H^i(X, R)$ の定義を順を追ってきちんと勉強しようと思うと，結局，ほとんどの人は途中で挫折することになる．プロの数学者を目指すのでなければ，そういう方法は避けたほうがよい．まず，使い方と計算方法をマスターし，暇があったら定義を勉強すればよい．

そうはいっても，微積分を使いこなすには，$\sin x$, e^x, $\log x$ 等の関数とその有難みを知っていることが必要なように，コホモロジーを使いこなすには，線形代数の簡単な知識が必要である．整数全体の集合，実数全体の集合，複素数全体の集合をそれぞれ $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ と書くが，コホモロジーの値は，$\mathbb{Z}^n, \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ のような加群やベクトル空間になる．ただし，大切なのは，肩に書いてある添え字 n であり，n はベクトル空間の次元とか，加群のランク (階数) とよばれる．次元は $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n = n$, $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^n = n$ のように，dim という記号で表される．コホモロジーの計算結果が，

$$H^i(X, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^3$$

であれば，答は「3 次元」であり，数値 $\dim_{\mathbb{R}} H^i(X, \mathbb{R}) = 3$ が大切なのである．たとえば，多様体のコホモロジーでは，X が球面だと $H^1(X, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^0 = 0$，$X$ がドーナッツの表面 (トーラス) だと $H^1(X, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^2$ となり，図形 X の特徴が 1 次コホモロジーの次元 0, 2 に現れる．

次元定理もコホモロジーの計算で大切であり，たとえば，A, B, C がベクトル空間で，$0 \to A \to B \to C \to 0$ が完全系列ならば，

$$\dim B = \dim A + \dim C$$

という公式が成り立つ．このような公式も，最初のうちは，意味不明かもしれないが，計算法則は難しくないので，慣れてしまうと実に便利で簡単な作業になる．そうなると，コホモロジー $H^i(X, R)$ も機械的に計算できるようにな

る．このことは，本書を読み進めるうちに，少しずつ分かって来るであろう．

さて，コホモロジーの計算ができるようになったとして，それは何の役の立つのか，という疑問にはあらかじめ答えておかないといけない．数学において「何の役に立つのか」という問は，深遠な問題である．こういう問は，国語や理科，社会，英語等の科目に対してはめったに発せられない．そんなことは，説明してもらわなくても自ずから明らかだからである．

小学校では，数の計算が役に立つことを示すために，それが，買物とか，長さ・面積・速度などの計量に応用できることが教科書の中で説明されている．数学自体は抽象的なので，数学教育では，具体的な応用の場面とか応用の方法まで教えないといけないのである．しかし，高校ぐらいになってくると，教える内容にくらべて，授業時間数が少なくなってくるので，応用の場面を教える暇はなくなってくる．また，応用の場面も，工学や経済学のように，日常生活からは離れたところになり，説明も難しくなってくる．結局，数学の抽象論を教えるだけで終わるので，だんだん数学が遠い存在になってくる．

コホモロジーは数学の中では非常に役に立つ．たとえば，フェルマーの最終定理「n が 3 以上の整数のとき，$x^n + y^n = z^n$ を満たす自然数 x, y, z は存在しない」のワイルズによる証明でも，コホモロジーは当たり前のように頻繁に登場する．しかし，日常生活で役に立つ場面を教えろと言われても，ちょっと思い付かない．他の自然科学でも，素粒子論のように高度な数学を使う分野では利用されているが，ふつうの工学では使わない．コホモロジーを使うほど深い数学的背景のある計算は，技術者からは「計算の過程や理由は結構ですから最後の答だけ教えてください」と言われるのが落ちである．したがって，いまのところは，数学者以外にとって，コホモロジーは高級な教養にすぎないかもしれない．しかし，コホモロジーは 20 世紀後半の数学が生み出した最大の成果であり，それは，20 世紀後半の物理学がゲージ理論という革命的な成果を得たことに似ている．ゲージ理論は，相対性理論以来の大発見である．

本書で扱うコホモロジーは，ゲージ理論や相対性理論同様，決して易しい話題ではない．最近，学校や大学では，理解度の低い項目をはじめから学習内容からはずすことによって，理解度の向上をはかろうとしている．しかし，難しいことは教えない，というのは教育の放棄にすぎない．本書で扱う内容は，旧

帝大の数学科でも理解度が低い内容が次から次へと登場する．本書では，それを教科書のような抽象論の積み重ねではなく，できるだけ具体例を使い，そのイメージがつかみやすいように説明したつもりである．そのため，証明はほとんど割愛したし，定義も教科書に載っている抽象的な表現を避け，噛み砕いた形や，もとの定義と等価なものにおきかえたところが多い．そういうわけで，若干厳密性は犠牲にしたが，難解な話題を避けたりすることは決してしなかった．

本書のもとになった公開講座「コホモロジー」も，企画の段階で内容が難しすぎるという批判を多く頂いたが，私の意見では，大学の公開講座は，軽チャーの講演ではなく，大学での学問の紹介であるということで，とにかく何とか開催することになった．参加して頂いた方には，内容の理解はともかく，多少でも現代数学の雰囲気が伝えられたのではないかと思う．

2002 年 4 月

安藤哲哉

目 次

はじめに　i

第 1 章　オイラーの法則から単体分割によるホモロジーまで　**稲葉尚志**

1.1　はじめに 1
1.2　2 つの図形をいつ同じと見るか 2
1.3　オイラー数 5
1.4　ホモロジー 13

第 2 章　位相多様体のホモロジー・コホモロジー　**久我健一**

2.1　位相多様体 26
2.2　2 次元位相多様体のいろいろなグループ分け 28
2.3　代数学からの準備 30
2.4　単体と向き，境界の対応 33
2.5　単体分割とホモロジー群 37
2.6　ホモロジー群の計算例 41
2.7　位相空間のホモロジー群 44
2.8　コホモロジー環 49
2.9　基本ホモロジー類とポアンカレ双対性 52
2.10　オイラー数とレフシェッツ数 54

第 3 章　可微分多様体とド・ラームコホモロジー　**杉山健一**

3.1　可微分多様体 58
3.2　曲線上での微分 59
3.3　曲面上の微分形式 60
3.4　向きづけ可能性 62
3.5　ストークスの定理 63
3.6　3 次元可微分多様体上の微分形式 64
3.7　n 次元可微分多様体上の微分形式 65

3.8 多様体上の不定積分 66
3.9 ド・ラームコホモロジー 67
3.10 実数係数ホモロジー群 69
3.11 ホモロジー上での微分形式の積分 71
3.12 ド・ラームの定理 72
3.13 いくつかのド・ラームコホモロジーの例 73

第 4 章 可換環上の加群のコホモロジー **西田康二**

4.1 環・体・加群 76
4.2 複体 80
4.3 完全系列 81
4.4 半完全関手 83
4.5 導来関手 85
4.6 導来関手 Ext 88
4.7 テンソル積と導来関手 Tor 89
4.8 導来関手の計算方法 91
4.9 2 重複体とスペクトル系列 92
4.10 おわりに 96

第 5 章 ケーラー多様体のホッジ理論とスキーム理論 **安藤哲哉**

5.1 リーマン計量 97
5.2 複素多様体とケーラー計量 99
5.3 複素多様体上の微分形式 100
5.4 ホッジ理論 101
5.5 複素代数多様体 102
5.6 座標環 104
5.7 局所環 106
5.8 層 107
5.9 層係数コホモロジー 109
5.10 スキーム 110
5.11 コホモロジーの基本公式 111
5.12 因子 113
5.13 リーマン・ロッホの定理 114

5.14 アンプル因子 115
5.15 消滅定理 116
5.16 スペクトル系列 117

第 6 章 数論におけるコホモロジー **大坪紀之**

6.1 はじめに 119
6.2 代数多様体 120
6.3 有限体 120
6.4 楕円曲線 122
6.5 ヴェイユ予想 126
6.6 スキーム 130
6.7 エタール・コホモロジー 132
6.8 例 136
6.9 モチーフ 139

第 7 章 佐藤超関数 **石村隆一**

7.1 一般化関数 142
7.2 1 変数の超関数 144
7.3 正則関数の層と層係数のコホモロジー 147
7.4 多変数の超関数 151
7.5 被覆のコホモロジーと超関数 153
7.6 多変数の超関数の例 158
7.7 環の層 $\mathfrak{D}_X$ 159

第 8 章 $\mathfrak{D}$-加群とコホモロジー **岡田靖則**

8.1 はじめに 162
8.2 ニュートンの力学 163
8.3 数理物理の偏微分方程式 164
8.4 典型的な常微分方程式 166
8.5 $\mathfrak{D}$-加群 170
8.6 微分方程式と $\mathfrak{D}$-加群 172
8.7 $\mathfrak{D}$-加群のコホモロジー 179
8.8 最後に 183

索引 185

記号表

論理記号.

$\forall x\ P(x)$, $P(x)\ (\forall x)$	任意の x に対し $P(x)$ が成立する.
$\exists x\ P(x)$, $P(x)\ (\exists x)$	$P(x)$ を満たす x が少なくとも 1 つ存在する.
$A \Longrightarrow B$, $B \Longleftarrow A$	A ならば B. A は B であるための必要条件である. B は A であるための十分条件である.
$A \Longleftrightarrow B$	A と B は同値である.
$A := B$, $B =: A$	A を B で定義する. B を A とおく.

集合.

$\mathbb{N}$	自然数 (正の整数) 全体の集合.
$\mathbb{Z}$	整数全体の集合.
$\mathbb{Q}$	有理数全体の集合.
$\mathbb{R}$	実数全体の集合.
$\mathbb{C}$	複素数全体の集合.
$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	n を法とする剰余系. (p.32)
$\mathbb{Z}_l$	l 進整数環. (p.135)
$\mathbb{Z}^n$	階数 n の自由 $\mathbb{Z}$ 加群. (p.31)
$\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$	$\mathbb{Z}$ に $\sqrt{2}$ を付け加えてえられる環. (p.76)
$\mathbb{Q}_l$	l 進数体. (p.135)
$\overline{\mathbb{Q}}$	$\mathbb{Q}$ を含む最小の代数閉体. (p.120)
$\mathbb{R}^n$	$\mathbb{R}$ の n 個の直積. n 次元ユークリッド空間. (p.31)
$\mathbb{C}^n$	$\mathbb{C}$ の n 個の直積.
$\mathbb{F}_p$	標数 p の素体 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. (p.121)
$\mathbb{F}_{p^n}$	位数 p^n の有限体. (p.121)

$\overline{\mathbb{F}}_p$	標数 p の最小の代数閉体. (p.121)
$R[X_1, X_2, \cdots, X_n]$	R 上の n 変数多項式環. (p.77)
$k[[X_1, X_2, \cdots, X_n]]$	形式的冪級数環. (p.106)
$\mathbb{P}^n$	n 次元射影空間. (p.103-104)
$\dim X$	X の次元. (p.28, 31)

写像, 準同型写像.

$f\colon X \to Y$, $X \xrightarrow{f} Y$	X から Y への写像 f. (p.33)
$X \approx Y$	X と Y は同相である. (p.4)
$X \cong Y$	X と Y は同型である.
$\operatorname{Im} f$	f の像 (イメージ). (p.48, 80)
$\operatorname{Ker} f$	f の核 (カーネル). (p.48, 80)
$\operatorname{Coker} f$	f の余核 (コカーネル). (p.82)

代数.

V/W	商加群など. (p.32)
$[x]$	剰余類. (p.32)
$\operatorname{Hom}_R(M, N)$	M から N への R-準同型写像全体のなす R-加群. (p.79)
V^*	V の双対空間 $\operatorname{Hom}_k(V, k)$. (p.50)
$V \oplus W$	V と W の直和. (p.31)
$M \underset{R}{\otimes} N$	M と N の R 上のテンソル積. (p.89-90)
$\operatorname{Krull}\ \dim R$	R のクルル次元. (p.106)
$\mathbb{Z}[G]$	群環. (p.138)

幾何.

S^1	円周. (p.8)
S^2	球面. (p.10)
T^2	トーラス. (p.10)

$\langle A_0 A_1 \cdots A_n \rangle$	n-単体. (p.35-36)
∂, ∂_q	境界作用素. (p.35-39)
$\omega = f\,dx \wedge dy$ など	微分形式. (p.59-66)
$d\omega$	外微分. (p.59-66)

代数幾何と数論.

$\mathrm{Spec}\,R$	アフィンスキーム. (p.110)
K_X	標準因子. (p.113)
$E[n]$	楕円曲線の n 分点. (p.123)
$\zeta(s)$	リーマン・ゼータ関数. (p.125)
$Z_X(T)$	合同ゼータ関数. (p.126)

(コ) ホモロジー.

C_q, C_*	鎖複体. (p.39)
$S_q(X)$	特異鎖群. (p.45)
$Z_q(C_*)$ など	輪体, サイクル. (p.39)
$B_q(C_*)$ など	境界輪体. (p.40)
$H_q(C_*)$	複体のホモロジー群. (p.40)
$H_q(X, \mathbb{Z})$ など	ホモロジー群. (p.41)
$H^q(X, \mathbb{R})$ など	コホモロジー群.
$H^{p,q}(X)$	ホッジコホモロジー群. (p.101)
$b_i(X)$	ベッチ数. (p.55)
$\chi(X)$	オイラー数. (p.7)
$\mathbf{R}^n T(M)$	右導来関手. (p.86)
$\mathbf{L}_n T(M)$	左導来関手. (p.87)
$\mathrm{Ext}^n_R(M, N)$	n 次拡大加群. (p.88)
$\mathrm{Tor}^R_n(M, N)$	n 次ねじれ加群. (p.90)

層.

$\mathcal{O}_X$	正則関数の層, 代数多様体の構造層. (p.108, 149)

$\mathrm{ord}_Y f$	Y における f のオーダー. (p.113)
$\mathrm{div}(f)$	有理関数 f が定める因子. (p.113)
$\mathcal{O}_X(D)$	因子 D が定める層. (p.113)
Ω_X^p	$(p,0)$-形式の芽の層. (p.110)
$\Omega_{S/R}$	微分加群. (p.133)
$\mathcal{B}_M$	佐藤超関数の層. (p.152)
$\mathcal{D}_X$	正則微分作用素の層. (p.159)
$\mathcal{H}om(\cdot,\cdot)$	準同型写像の層. (p.179)
$\mathcal{E}xt(\cdot,\cdot)$	拡大加群の層. (p.179)

第 1 章

オイラーの法則から単体分割によるホモロジーまで

稲葉尚志

1.1 はじめに

三角関数にサインとコサインがあるように，本書の主役**コホモロジー**にも「コ」のない**ホモロジー**という兄弟 (姉妹？) がいる．先に生まれたのはホモロジーである．どちらも図形の性質を調べる手段として考え出されたもので用途も性格も良く似ているが，ホモロジーのほうは歩いて見て回る感じで親しみやすく，コホモロジーのほうは飛行機に乗って鳥瞰する感じで少しお澄ましだが筋が良い．現代数学ではどちらかというと弟のほうが幅を利かせている状態になっているが，兄の重要性も決して減ったわけではないし，弟を理解するためにはぜひとも先に兄を知っておく必要がある．そこでこの章ではまずホモロジーを紹介する．

今から約 1 世紀前，フランスの数学者ポアンカレ (1854–1912) は「図形を研究するのに細かいデコボコや曲がり具合などを気にしすぎては本質を見失う．もっと大雑把な見方をすることによって，却って本質を浮き彫りにできないだろうか」と考えた.「木を見て森を見ず」という言葉があるが，ポアンカレは幾何学の分野において一本一本の木に囚われずに森全体を見ようとしたのである．それはユークリッド以来の伝統的手法で図形を研究していた人たちに



ポアンカレ

とって，思いもよらぬ発想であったであろう．いい加減な怪しい数学と映ったかもしれない．しかし彼は研究の結果ホモロジーという基本概念に到達し，多くの重要な成果をあげる．そしてその考え方が発展してついに**位相幾何学** (英語では**トポロジー**，俗称**柔らかい幾何学**) という新しい学問分野が誕生したのである．その後すぐにコホモロジーも生まれ，さらに，この兄弟は幾何学という生まれ故郷から飛び出して代数学，解析学等，数学のいろいろな分野にも進出していった．そして現在ではなくてはならない考え方となって数学の中に定着し，研究の最前線でも盛んに使われている．

1.2　2 つの図形をいつ同じと見るか

「互いに合同な図形は同じと見なします」と言われても多分異論はないであろうし,「もう少し気持ちをおおらかにして，互いに相似な図形も同じというこ

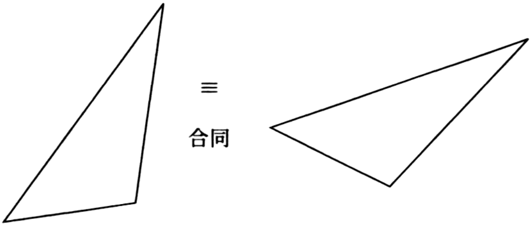


図 1.1　合同な三角形

とにしてください」と言われても多分受け入れることができるであろう．

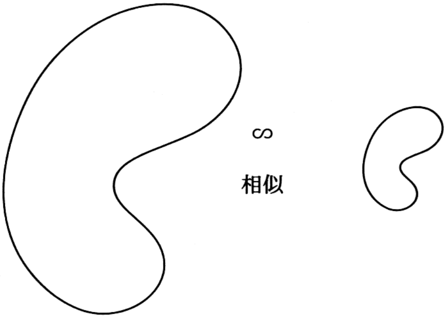


図 1.2　相似な三角形

しかし，私たちはこれからもっともっとおおまかな見方をしたいのである．次の 8 つの図形を見てみよう．

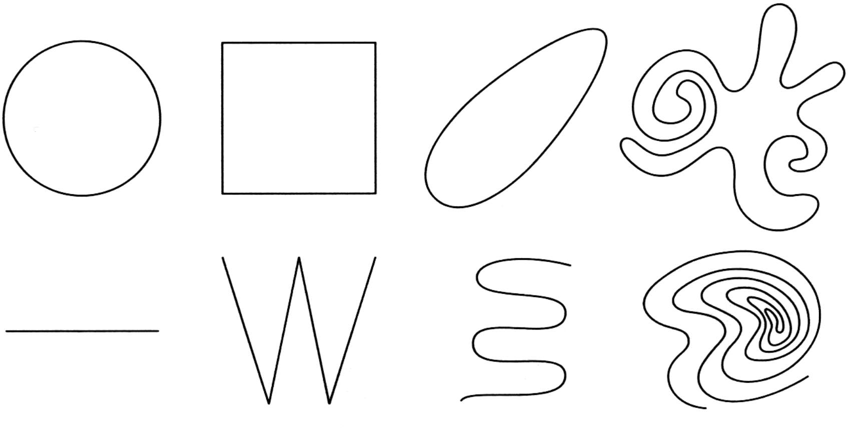


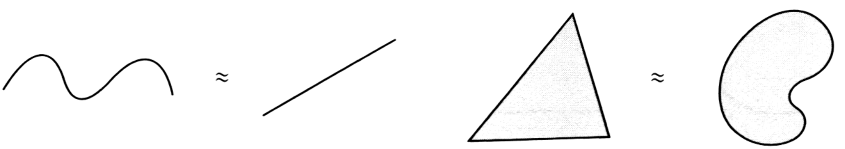
図 1.3　8 つの図形

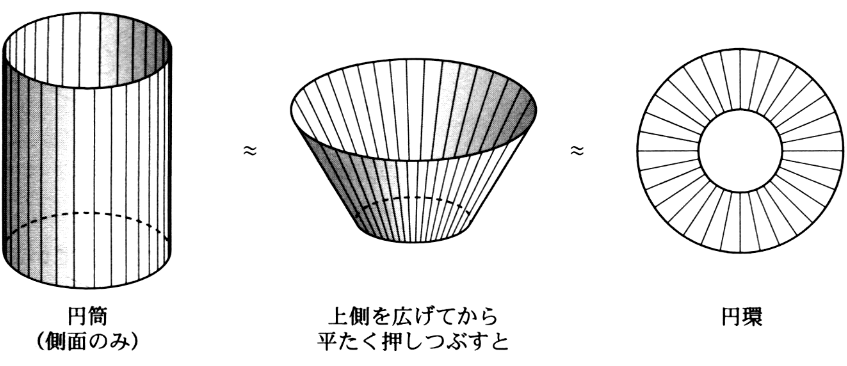
これらはどの 2 つをとっても合同でも相似でもないが，ひもでできていると思えば，上 4 つはみんな丸い輪の形に直せるし，下 4 つはどれもピンと伸ばせば線分になる．さらに，もし，伸び縮みも自在な素材でできていると思う

と，長さも調整できるので，上 4 つと下 4 つはそれぞれ結局互いに同じものになる．このように，やわらかく伸縮自在だと思って，連続的な変形で一方の図形 X をもう一方の図形 Y に重ね合わせることができるとき，図形 X と Y は**同相**であるといい，$X \approx Y$ で表す．記号 $\approx$ は「やわらかいイコール」である．ただし，この変形の途中では，図形をちぎったり，くっつけたりすることは厳禁とする．すなわち，つながっているものはつながったままで，離れているものは離れたままで変形しなければならない．

この同相という概念はとても自然な概念である．日常生活で考えてみても，私たちはひものようにやわらかい素材でできているものに対して合同かどうかを問題にすることはない．少しつつけば形はすぐに変形してしまうからである．輪になっているかどうか等，連続変形しても変わることのない性質だけを気にする．このように私たちはすでに普段から知らず知らずのうちに同相なものは同じとみなすという考え方を身に付けているのである．

ここで，どんな図形が同相なのかを見分ける目を肥やすためにいくつか具体例を挙げておこう．





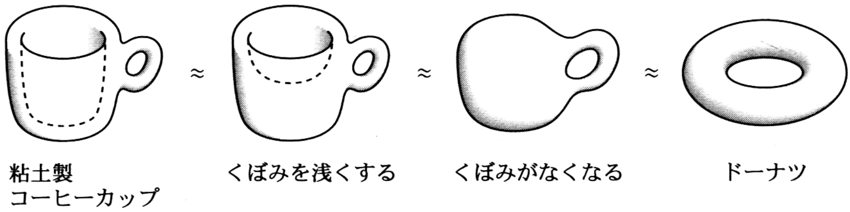


図 1.4　同相の例 4 つ

さて，鑑識眼も養われたところで，**これからは互いに同相な図形は同じものとみなす**ことにしよう．これが位相幾何学の出発点である．

1.3　オイラー数

2 つの図形が与えられたとき，それらが同相であるかないかを確かめるのにいちいち実際に連続変形を実行して重ね合わせる努力をしていたのでは大変である．それにもしいくら努力してみても重ならなかった場合，そのことから同相でないという結論を導くことはできない．なぜなら，もっと上手な変形の仕方を発見すれば，うまく重ね合わせることができるのかも知れないという可能性がいつまでも残ってしまうからである．そこで，次のような問題を考えよう．

「2 つの図形が同相でないことを，数のちがいによってはっきりと区別することはできないか？」

つまり，図形から数を取り出すことによって，言い換えると，**幾何から代数**へ移行することによって，事態を明確化できないだろうか？

ただし，数といっても**長さ**や**面積**や**角度**など私たちが今までに図形から取り出していた馴染みの深い数はすべて役に立たない．なぜなら，それらは連続変形 (伸ばす，広げる，曲げるなど) するとすぐに変わってしまうから，つまり同じもの (同相なもの) でもちがう値をとってしまうからである．私たちのほしいのは連続変形しても変わらないようなしぶとい数なのだ．だが，そんなもの果たして存在するのだろうか？

そこで登場するのが**オイラー数**である．オイラー数を説明するには**単体分割**

という考え方が必要になるので，まずそれを紹介しよう．

図形はそのままではくにゃくにゃと曲がっていたり複雑な形状をしていたりすることも多く，捕らえ所がない．そこで，これをまず積み木のような簡単なピースを何個か組み合わせてできたものとみる．このとき材料となる各ピースを**単体**という．単体は次元ごとにあり，0 次元単体 (略して，0-単体) は点，1 次元単体 (略して，1-単体) は線分，2 次元単体 (略して，2-単体) は三角形，3 次元単体 (略して，3-単体) は四面体である．

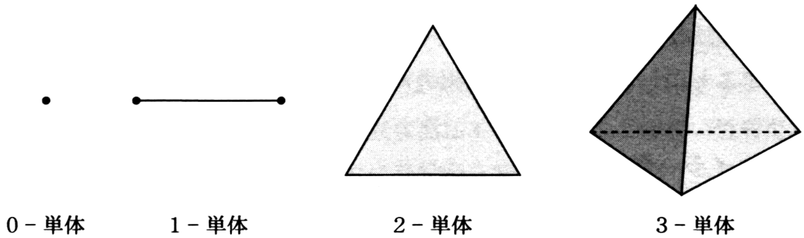


図 1.5　単体

4 次元以上の単体も定義されるが，次元が高いので目に見えるようには描けない．

さて，ある図形を**単体分割**するというのは，その図形を同相の範囲で変形して，単体の組合せと見ることをいう．

たとえば，次の図は円周を 0-単体 5 個と 1-単体 5 個に単体分割してみたものである (2 次元以上の単体は使う必要がない)．

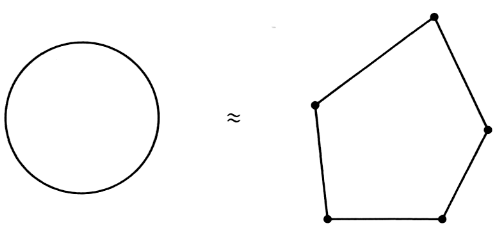


図 1.6　円の単体分割 (その 1)

単体分割の仕方はもちろん 1 通りではない．他にもいろいろある．

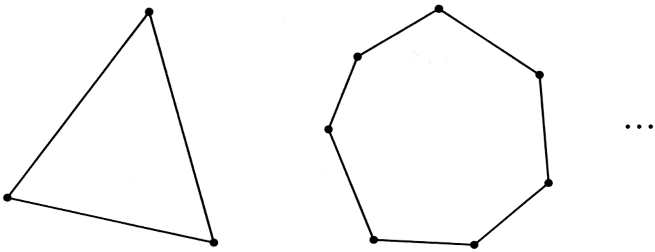


図 1.7　円の単体分割 (その 2)

図 1.8 はひもの単体分割の例である．

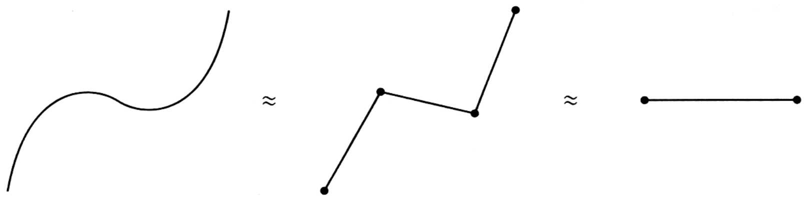


図 1.8　ひもの単体分割

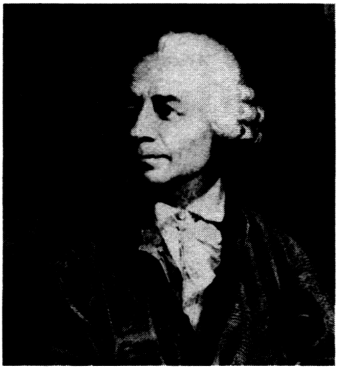
さて，オイラー (1707–1783) は単体分割を使って図形から数を取り出すある方法を思いついた．実はオイラーは図形が球面のときだけを考えたのだが，その 150 年後，ポアンカレがそれを一般の図形にまで拡張したのである．彼らの大発見は次である．

オイラー・ポアンカレの定理．　図形 X が与えられたとき，それを単体分割して，

$$(0\text{-単体の個数}) - (1\text{-単体の個数}) + (2\text{-単体の個数}) - \cdots$$

という**交代和** (プラスとマイナスを交互に繰り返す) を計算すると，なんと驚くべきことに，その結果は単体分割の仕方によらず常に同じ数になる．

この数を図形 X の**オイラー数** (または，**オイラー・ポアンカレ標数**) といい，$\chi(X)$ で表す．見慣れない文字 χ はギリシャ語のアルファベットのカイである．オイラー数は図形を単体分割するときに行う連続変形にも影響され


オイラー

ず，単体分割の仕方にもびくともしない．与えられた図形に対していつも 1 つの決まった数を与えてくれる．適当なたとえかどうかわからないが，人の身長や体重は年月とともに変化するが血液型は生まれてからずっと変わらない．オイラー数はちょうど図形の血液型のようなものだと言える．

では，いくつかの図形のオイラー数を計算してみよう．

まず，円周を考える．円周は数学では記号 S^1 で表す．円周を先程のように五角形に単体分割してオイラー数を計算してみると

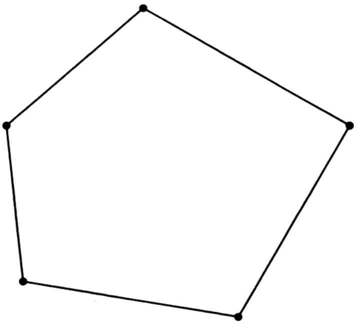


図 1.9

$$\chi(S^1) = 5 - 5 = 0$$

となり，S^1 のオイラー数は 0 であることがわかる．念のため，他の単体分割

(三角形，四角形，$\cdots$) でも計算してみよ．常に 0 という同じ値を得ることでオイラー・ポアンカレの定理の正しさが実感できるであろう．

次に，線分のオイラー数を求めてみる．線分は I で表す．単体分割として，両端点が 0-単体で，線分自身が 1-単体となるものをとれば，

$$\chi(I) = 2 - 1 = 1$$

となるので，I のオイラー数は 1 である．

図 1.10 線分 I

以上の計算により，S^1 と I のオイラー数は異なることがわかった．オイラー・ポアンカレの定理の対偶を考えれば，もし 2 つの図形が同相であればそれらのオイラー数は等しくなるはずであるから，結局，円周と線分は同相でないことが示されたことになる．オイラー数を使うことにより，同相でないことが数のちがいとして明確に判定できたのである．

もう少しオイラー数の計算を続けよう．円板 (数学では D^2 で表す) のオイラー数はいくつだろうか？

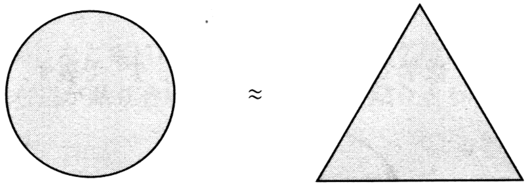


図 1.11 円板と三角形

円板は連続変形により三角形の板に直せるから，頂点が 0-単体，辺が 1-単体，面が 2-単体の単体分割とみれば

$$\chi(D^2) = 3 - 3 + 1 = 1$$

と求められる．

次に，球面 (数学では S^2 で表す) のオイラー数はどうだろうか？　各面が三角形であるような凸多面体の表面はすべて球面の単体分割である．具体的にはたとえば図 1.12 のような正四面体，正八面体，正二十面体などが考えられる．

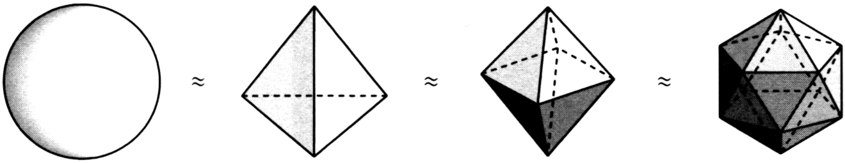


図 1.12　球面，正四面体，正八面体，正二十面体

これらそれぞれについて (0-単体の個数) − (1-単体の個数) + (2-単体の個数) を計算してみると，

$$4-6+4=2, \quad 6-12+8=2, \quad 12-30+20=2$$

となり，どれも答えは 2 となるから，$\chi(S^2)=2$ である．

注意.　オイラーは実は面が三角形とは限らない一般の凸多面体 (たとえば立方体などでもよい) に対して (頂点の数) − (辺の数) + (面の数) が常に 2 になることを示した．これを**オイラーの多面体定理**または**オイラーの法則**とよぶ．オイラー・ポアンカレの定理の原型である．

ドーナツの表面を，数学では**トーラス**といい，T^2 で表す．

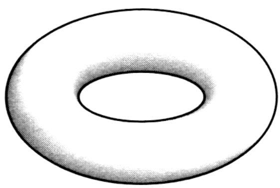


図 1.13　トーラス

この節の最後としてトーラスのオイラー数を求めよう．そのためにまずトーラスを単体分割したいのだが，試みてみるとすぐにわかるようにそれは相当大

変である．何かうまい方法はないだろうか？

1 つの有力な方法として，トーラスをハサミで切り開いて平らに広げてから単体分割し，あとでまた貼り戻す，というやり方が考えられる．この方法でやってみよう．まず，トーラスを図 1.14 のように 2 つの曲線に沿ってハサミで切り開くと四角形になる．

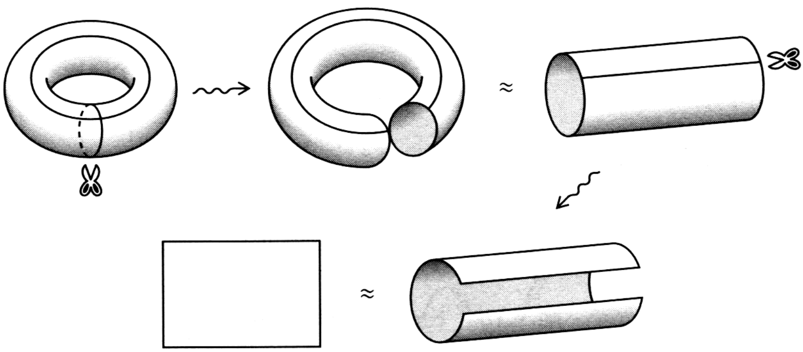


図 1.14　トーラスの展開

次に，この四角形に対角線を 1 本引いて単体分割する．

すると，0-単体が 4 個，1-単体が 5 本，2-単体が 2 つになっている．(ここで $\chi(T^2) = 4 - 5 + 2 = 1$ とするのは早合点で，誤りであるから注意せよ.) トーラスに貼り戻したときには 4 つの 0-単体は 1 ケ所に集まって 1 点になり，1-単体は左辺と右辺が貼り合い，上辺と下辺が貼り合って結局 3 本になるので，正しい計算は

$$\chi(T^2) = 1 - 3 + 2 = 0$$

である．これでトーラスのオイラー数が求まった．

注意.　今考えたトーラスの単体分割では 1 つの 2-単体 (三角形) の 3 頂点がくっついて 1 点になってしまっている．このようなことは板でできた本当の三角形では決して起らないことである．三角形をひん曲げない限りそんなことにはならない．その意味で，実は今作ったトーラスの分割は厳密な定義では単体分割として認められないものになっている．しかし，ここではそんな堅い

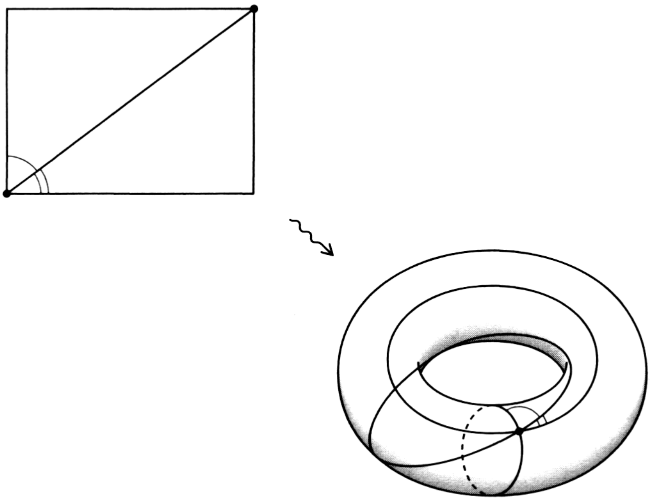


図 1.15　トーラスの単体分割

ことは言わないことにした．

練習問題．　下のような 2 人乗りの浮き輪 (数学では**種数 2 の閉曲面**とよび，Σ_2 などで表す) のオイラー数を，トーラスのときと同じように，適当にハサミで切り開く方法により，求めよ．-2 という答えが出れば正解である．

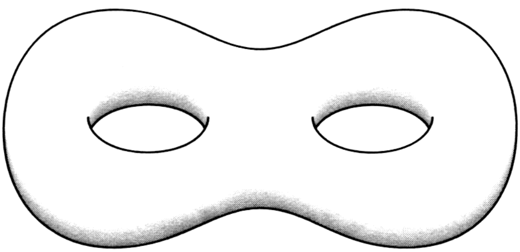


図 1.16　種数 2 の閉曲面

1.4 ホモロジー

人に対しては，ABO 血液型の他にもいろいろの判定法 (Rh 血液型，指紋，DNA，$\cdots$) が知られている．では，それと同様に，図形が同相かどうかを判定する際にも「**オイラー数よりももっと詳しい情報はないのだろうか？**」という疑問が自然に発生してくる．そこでいよいよ**ホモロジー**の登場となる．

しかし実はホモロジーはオイラー数とちがって，もはや**数ではない**ので，ちょっと理解するのが難しくなる．いったいどういうものなのか，まず比喩的に説明してみることにしよう．

低地に居て高台の地形 (でこぼこ) を調べたいとする．しかし目は届かない．では，どうするか？

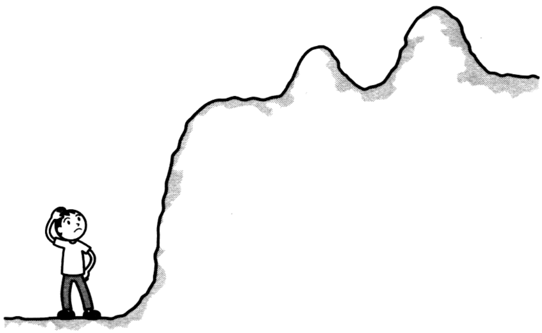


図 1.17

下から輪をいろいろ投げてみて，どの辺りでひっかかるかをみる．という方法が考えられる．図 1.17 のようであったならば，いろいろやってみると，こぶが 2 つあることが判明するであろう．

ホモロジーの考え方は，これと似ている．

さて，比喩はこれくらいにして，本格的な説明に入ろう．

ホモロジーは**次元ごと**に定義される．ここではまず直観的に一番わかりやすい **1 次元のホモロジー**の説明から始めることにする．図形 X の 1 次元ホモロジーを考えるには，まずその図形の中にいろいろの 1 **次元サイクル**を描いて

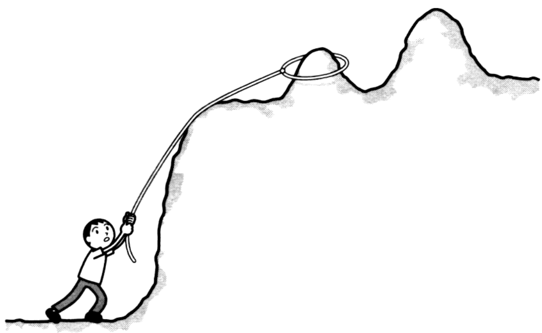


図 1.18

みる．1 次元サイクルというのは**向きのついた輪**のことである．ただし，いつも 1 個の輪に限る必要はなく，2 個以上の輪をまとめて 1 つのサイクルと見ることもある．

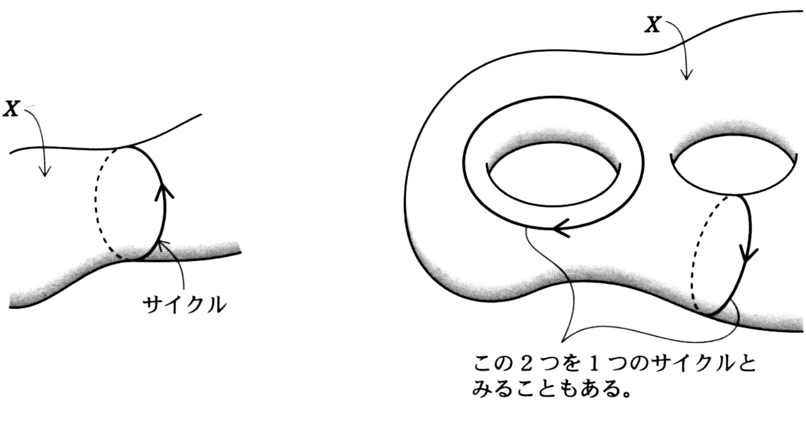


図 1.19　1 次元サイクル

注意．　厳密には最初に図形を単体分割しておいて，サイクルとしては 1-単体がつながってできる折れ線的な輪だけを考えるのであるが，ここではイメージをつかむことを主眼においているので，単体分割や折れ線にこだわらず，サイクルを曲線で描くことにした．

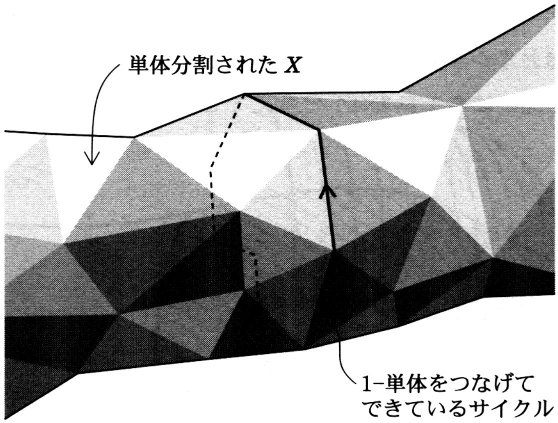


図 1.20 単体分割と折れ線サイクル

そして，次のような 2 つのサイクル (サイクルに名前をつけて a, b とよぼう) は同じものと考える．

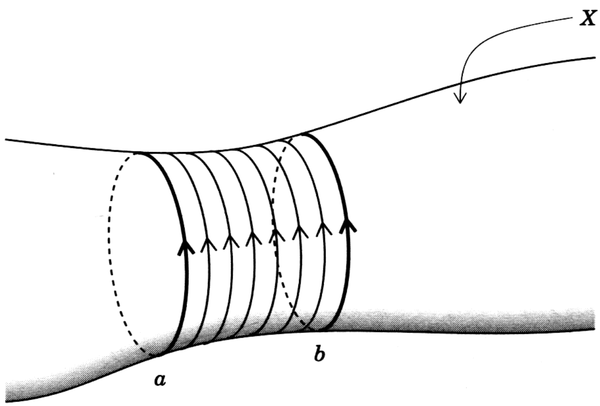


図 1.21 ホモロガスなサイクル (その 1)

左のサイクル a は図形 X 上を右に連続的に滑らせていくと右のサイクル b まで簡単に持っていくことができるのだから，これらを同じと見なすのは極めて自然であろう．正式用語では，このとき a と b は**ホモロガス**であるという．

さて実は，ホモロジー理論では,「木を見ないで森を見る」ために，もっと大胆な，もっとおおまかな同一視を行う．すなわち，次のような 2 つのサイクル a, b も同じ (正式にはホモロガス) と考えてしまうのである．

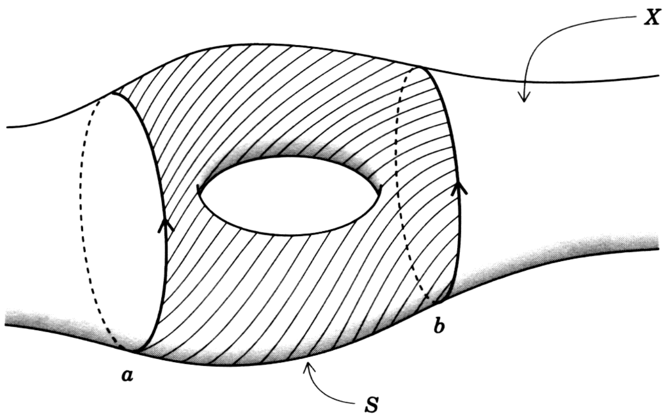


図 1.22　ホモロガスなサイクル (その 2)

この 2 つのサイクルたちの間には「穴」が開いているのでもはや連続変形では移り合わないが，このように a と b が 1 つの曲面 S で結ばれているとき (X が曲面の場合でいえば，a と b に沿ってハサミで切ると図形 X からその一部分の領域 S が切り離されるとき) には「大目に見て」2 つは同じと見なしてしまおうというのである．普通の感覚では連続変形で移り合うもの同士しか同じとは見なしたくないところであろうが，そこが一種の大飛躍であり，ホモロジー独特のおおまかさなのである．しかし，実はこの大飛躍によって，ホモロジーは非常に計算しやすい理論になることができたのである．

連続変形で移り合うもの同士だけを同じと見なす理論は**ホモトピー**理論とよばれる．ホモトピー理論は計算のし易さではホモロジー理論に負けるものの，ホモロジー理論よりも優れている点も多く，両者は位相幾何学を支える車の両輪のような関係になっている．

話を続けよう．サイクル a が図 1.23 のようになっていたとする．

このとき a は連続変形で 1 点に縮んでしまうので，0 と見なす．つまり a

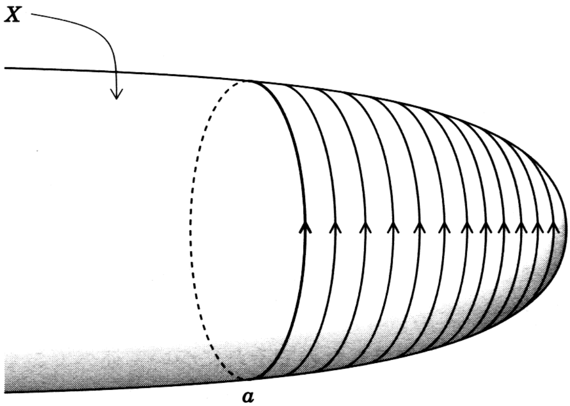


図 1.23　0 にホモロガスなサイクル (その 1)

は 0 に**ホモロガス**であるという．この節の冒頭で述べた比喩で言えば，これは「どこにも引っかからない輪」に相当する．

さて，ホモロジーのおおらかさを発揮して，連続変形では 1 点には縮まなくても，a がある曲面 S のふちになっているとき (X が曲面の場合には，言い換えると，a に沿って X を切ると一部分の領域 S が切り離されるとき)，すなわち，図 1.24 のような状況のときにもサイクル a は 0 と見なしてしまう．

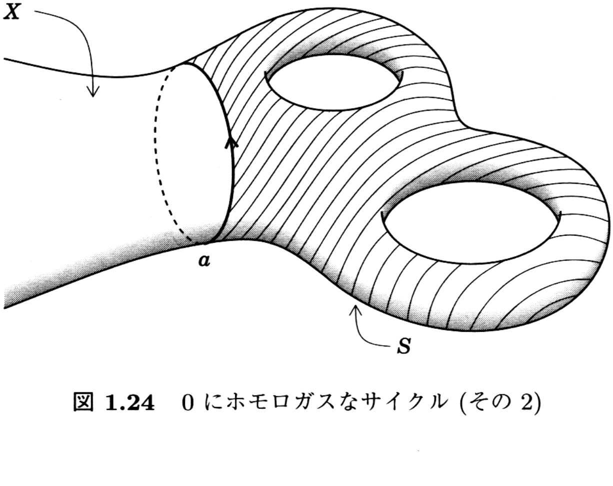


図 1.24　0 にホモロガスなサイクル (その 2)

さて，これでようやくホモロジーが定義できる．図形 X 内の 1 次元サイクルを (ホモロガスなサイクルたちは同じと見なした上で) すべて集めたもの (集合) を図形 X の 1 **次元ホモロジー群**というのである．最初の比喩で言えば，スルッと抜けてしまうような輪は無し (零) とし，少し動かすとうつりあう輪どうしは同じと見て，引っかかる輪であってその引っかかり方が本質的にちがうものだけをすべて集めてきたものが 1 次元ホモロジー群であるということになる．したがって，図形 X を調べるための輪の情報を全部含んでいる．X の 1 次元ホモロジー群は $H_1(X)$ で表す．

ここで，**群**という言葉がでできたのでそれについて述べておく．サイクルについて，次のことに注意しよう．サイクルは (−1) 倍できる (向きを逆にすればよい)．

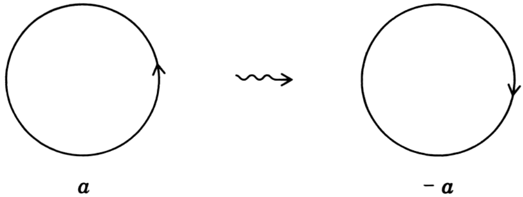


図 1.25　サイクルの (−1) 倍

2 つのサイクルはたし算できる ($a+b$ は単に a と b を合わせて 1 つのサイクルと見なしてできるサイクルのこと)．(最初のほうで述べた「2 個以上の輪をまとめて 1 つのサイクルと見ることもある」を思い出せ．)

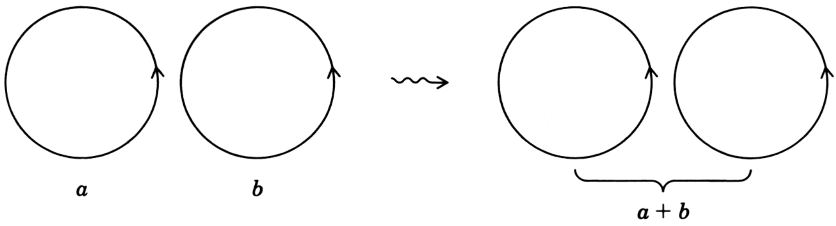


図 1.26　サイクルのたし算

また，サイクルは 2 倍，3 倍，$\cdots$ できる (a を 2 重にしたものが $2a$ であ

る．別の言い方をすると，a と a を少し横にずらしたものをまとめて 1 つのサイクルとみたのが $2a$ である).

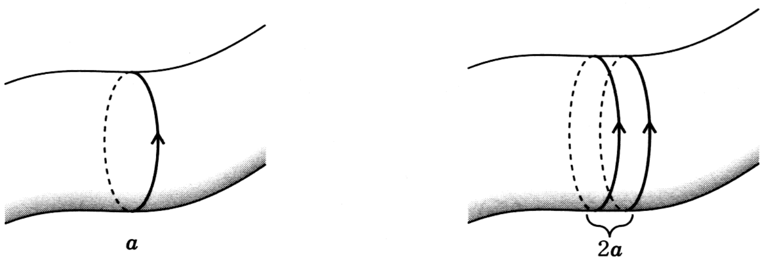


図 1.27　サイクルの整数倍

結局，サイクルたちをあたかも数のように思って，サイクルどうしのたし算，ひき算ができるのである．数学では，このように，数でなくても，たし算，ひき算ができる集合があったらそれを**群**とよぶ．1 次元サイクルの集合はまさにそのような集合であるので，群という接尾辞をつけるのである．最初に，ホモロジーは数ではないといったが，結局，**数**ではなくて**群**なのである．

注意．　かけ算，わり算のできる集合も群という．それと区別するために，たし算，ひき算できる集合のほうは**加法群**とよばれることも多い．

注意．　群の一般的な定義には交換法則を含めない．つまり，一般の群では $a+b$ と $b+a$ が一致するとは限らない．しかし，ホモロジー群では常に交換法則が成り立つ．それがホモロジーの計算を容易にしている大きな理由である．実は，ホモロジー群で交換法則が成り立つことと，既述した「大飛躍，おおまかさ」とは密接に関連している (というか，同じことを言い換えたものである).

注意．　1 次元ホモロジー群は $H_1(X, \mathbb{Z})$ と記すことも多い．ここで $\mathbb{Z}$ は整数全体の集合を表す．各サイクルは整数倍することだけが許されていることを明示するために $\mathbb{Z}$ を書き添えたのである．今の時点ではサイクルの分数倍，無理数倍，虚数倍などは定義していないが後の章ではそのようなものも考えることになる．その場合には $\mathbb{Z}$ を別の記号で置き換えることになる．

ここで 1 次元ホモロジー群の具体的な計算例として，球面とトーラスの場

合を考察しよう．

まず，球面 S^2 であるが，球面の上に，ひもでできた輪をどんなふうに置いたとしても，どこにも引っかかるところがないので少し引っ張るとすぐにツルッとはずれてしまう．これは S^2 上の 1 次元サイクルはすべて 0 にホモロガスであることを示している．したがって，$H_1(S^2) = 0$ である．

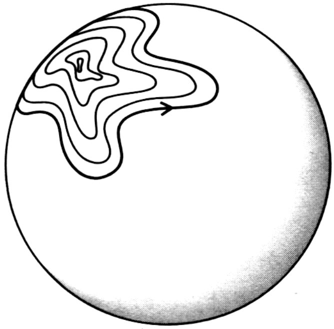


図 1.28　球面上のサイクル

次に，トーラス T^2 を考えよう．図 1.29 に示した T^2 上の 2 つの 1 次元サイクル a と b は，それらがひもでできていると思って考えてみればわかるように，T^2 の上をどのように滑らせていっても 1 点に縮めることは不可能である．また，a と b をぴったり重ね合わせることもできないので，これらは互いに異なるゼロでない 1 次元サイクルであることがわかる．

T^2 上には他にもいろいろのサイクルが描けるが，それらはどれも，a と b

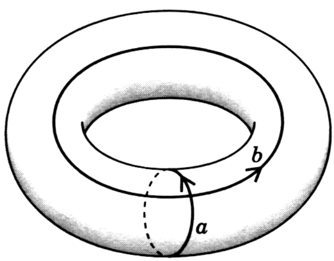


図 1.29　トーラス上のサイクル

を使って (たし算や整数倍により) 表せる．

一例として図 1.30 に描いたサイクル c についてそのことを示してみよう．曲面上で直接考えるのはちょっとやりにくいので，前に T^2 を単体分割したときと同様に，a と b に沿ってハサミで切り開いて，四角形に広げてから考える．すると，c は図 1.30 のように，まず a を通ってから引き続き b を通ってもとに戻ってくるというサイクルに連続変形できることがわかる．これは $c = a + b$ という等式が成り立つことを示している．

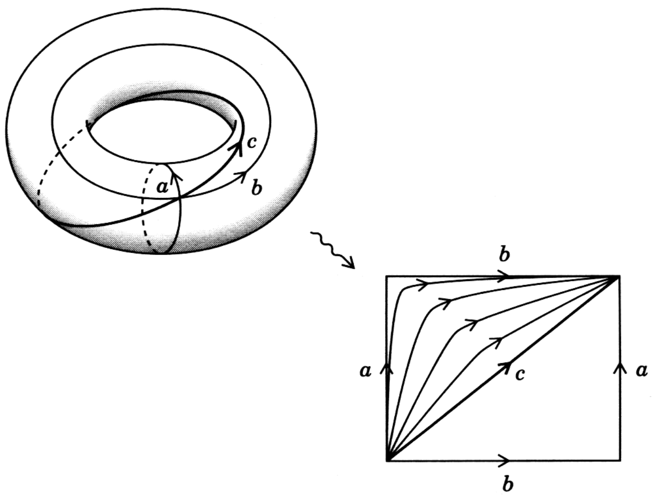


図 1.30

結論として，$H_1(T^2)$ には 2 つの基本となるサイクルが存在し，他のサイクルはすべてその 2 つを使って表せるということになる．このことを $H_1(T^2)$ の**階数は 2 である**という．

前にやった球面の場合はゼロでないサイクルは 1 つも存在しなかった．その場合には，$H_1(S^2)$ **の階数は 0 である**という．

以上で 1 次元ホモロジー群の説明は一通り終わった．

次に 0 次元ホモロジー群と 2 次元ホモロジー群についても述べておく．

まず，0 次元ホモロジー $H_0(X)$ について．0 **次元サイクルは点** (または何個かの点，またはその (−1) 倍) である．

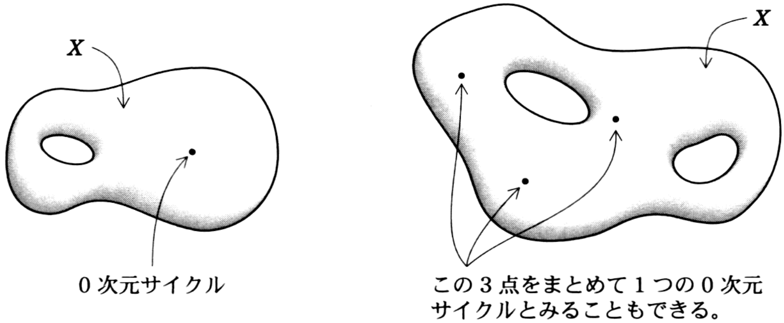
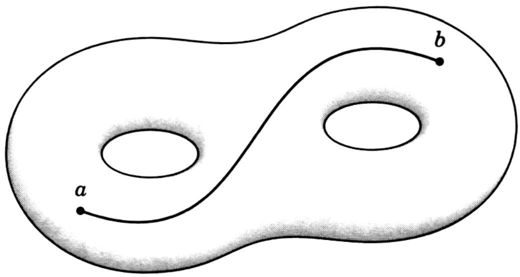


図 1.31　0 サイクル

2 つの 0 次元サイクルは図形 X 内で線でつなげるとき同じ (ホモロガス) と見る.



$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ はホモロガス

図 1.32　0 サイクルのホモロガス

日本列島はいくつもの島から成っているので全国を徒歩だけで旅行してまわることはできないが，1 つの島だけの国なら徒歩で全国巡りができる．それと同様に，図形 X 全体が陸続きであって 2 つ以上の「島」に別れていないなら，X 内のどんな 2 点も X 内で線でつなげるから，すべての点は互いにホモロガスということになり，結局，基本的な 0 次元サイクルは 1 個だけで足りることがわかる．すなわち，**X が 1 つの島ならば $H_0(X)$ の階数は 1 である**．特に，S^2 や T^2 はそれぞれ陸続きの 1 つの島であるから，$H_0(S^2)$ の階

数も $H_0(T^2)$ の階数も 1 である．

注意． もし，図形 X が複数の島の集まりである場合には，異なる島にある 2 点は決して陸 (図形) 伝いには線でつなげないからホモロガスにはならない．よって，基本となるサイクルとして各島から 1 点ずつとってくる必要がある．すなわち，**$H_0(X)$ の階数はちょうど島の数と一致する．**

次に，2 次元ホモロジー $H_2(X)$ について．2 **次元サイクル**は，ひとことで言えば**縁のない曲面 (に向きを入れたもの)** である．ここで，曲面に向きを入れるというのはその曲面のどっち側をおもてと見てどっち側をうらと見るかをきめることを意味する．

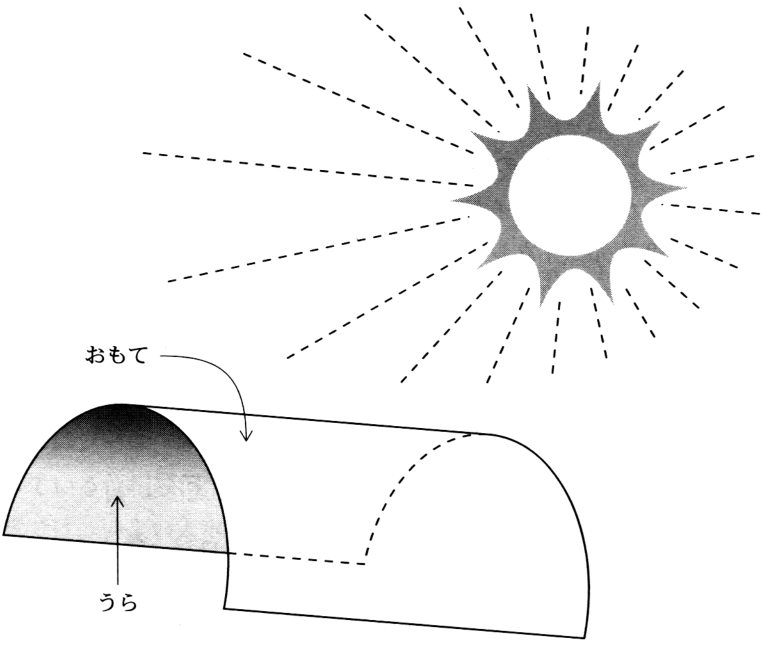
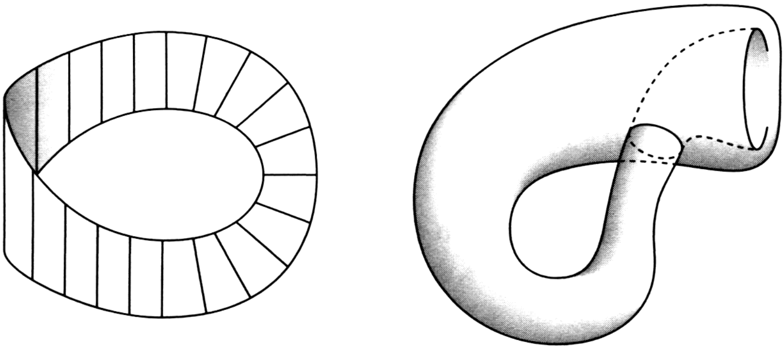


図 **1.33** おもてとうら

普通私たちが見慣れている曲面 (円板や球面やトーラスなど) には向きを入れることができるが，向きを入れることの不可能な (つまり，うらとおもての区別のつけようのない) 奇妙な曲面 (**メビウスの帯**や**クラインの壺**など) も存在

するので注意が必要である．このような曲面は 2 次元サイクルにはなれない．



メビウスの帯　　　　クラインの壺

図 1.34　メビウスの帯とクラインの壺

球面 S^2 やトーラス T^2 の場合，たとえば外側がおもてだと決めておけばその図形そのものが 2 次元サイクルとなり，このサイクルを使って表すことのできないような 2 次元サイクルは他にはどこにもない．よって，$H_2(S^2)$ **の階数**も $H_2(T^2)$ **の階数**も 1 である．

注意．　S^2 や T^2 は 2 次元までの単体だけで単体分割されるので 3 次元以上のサイクルは (0 だけしか) ない．したがって，3 次元以上のホモロジーはすべて 0 になる．

さて，ここでホモロジーに関する最も重要な定理を述べよう．

定理．　図形 X と Y が同相ならば，それらのホモロジー群はすべての次元において同じ (正式用語では**同型**) になる．

この定理により，ホモロジーもオイラー数と同様に図形が同相かどうかの判定に使えるのである．実際に使うときには定理の対偶をとって「もし 2 つの図形のどの次元かのホモロジー群が異なっていればそれらは同相でない」の形で適用することになる．

たとえば次のように用いることができる．上にやった計算によると，$H_1(S^2)$ の階数と $H_1(T^2)$ の階数は，それぞれ 0 と 2 で異なっていた．このことから

S^2 と T^2 が同相でないことが判別されるのである．この 2 つが同相でないことはすでにオイラー数の違いによっても判別されていたが，私たちは新しいもう 1 つの判定法を獲得したわけである．

だが，オイラー数とホモロジーは互いに無関係なのであろうか？答えは否である．次の定理が示すように，オイラー数は実はホモロジーから導くことができるのである．

定理． 図形 X のオイラー数 $\chi(X)$ は，ホモロジーを用いて次のように表すことができる．

$$\chi(X) = (H_0(X) \text{ の階数}) - (H_1(X) \text{ の階数}) + (H_2(X) \text{ の階数}) - \cdots$$

$H_k(X)$ の階数は k **次元ベッチ数**とよばれることもある．この言葉を使えば，上の定理は「**オイラー数は各次元のベッチ数の交代和である**」となる．ベッチ数を記号で表すときには $b_k(X)$ で表す．

球面とトーラスの場合にこれを確かめてみよう．$b_0(S^2) = 1$, $b_1(S^2) = 0$, $b_2(S^2) = 1$ であったから，ベッチ数の交代和は $1 - 0 + 1 = 2$ となり，確かに $\chi(S^2)$ に一致する．また，$b_0(T^2) = 1$, $b_1(T^2) = 2$, $b_2(T^2) = 1$ であったから，ベッチ数の交代和は $1 - 2 + 1 = 0$ となり，確かにこれも $\chi(T^2)$ に一致する．

以上でホモロジーを紹介するという本章の目的は達成された．最後に次のようにまとめの言葉を述べておこう．

「ホモロジーは，オイラー数やベッチ数の情報のみならず，数多くの情報を内蔵している位相幾何学の素晴らしい概念である．」

次章では，いよいよホモロジーの兄弟であり本書の主役であるコホモロジーが登場する．そして，数学の世界の中のいろいろな場所でこの兄弟が存分に大活躍する様子が見られるであろう．ぜひ楽しんで読み進めて頂きたい．

第 2 章

位相多様体のホモロジー・コホモロジー

久我健一

2.1　位相多様体

1 次元多様体は曲線のことであり，2 次元多様体とは曲面のことである．数学ではこれを一般化し，もっと次元の高い図形 (多様体) を考えることができる．曲線や曲面は目で見えるので，直感的な議論ができるが，高次元の図形 (多様体) は視覚的にとらえられないので，数学的にきちんとした記号で表す必要がある．

第 1 章で述べたように，三角形の周も，四角形の周も，円周も，同相であった．このように，角度とか長さを無視して，線のつながり方だけに注目して考察する曲線を，**1 次元位相多様体**という．1 次元位相多様体としては，三角形の周も，円周も，同じもの (同相，同型) であると考える．

同じように，凸多面体の表面も，球面も同じものとして曲面をとらえるとき，それを **2 次元位相多様体**という．

これから，n 次元位相多様体を定義したいのだが，まず，$n = 2$，つまり，曲面の定義を，式と記号を用いて厳密化することから始めよう．

紙風船は，何枚かの紙を貼りあわせて作った球面である．2 次元位相多様体は，ゴムのように伸縮自在な紙片を何枚か貼り合わせて得られる曲面で，この

紙風船の作り方と似ている．紙片を貼り合わせるには，2 枚の紙片を重ねて糊付けする．この重ねる部分を糊代 (のりしろ) という．紙風船では，この貼り合わせは，(3 次元) 空間 ($\mathbb{R}^3$ と書く) の中で行うが，2 次元位相多様体では，どんなに高い次元の空間の中で貼り合わせを行ってもよいし，そもそも，ある空間の中に紙片があると考える必要はない．

紙片は，「平面 ($\mathbb{R}^2$ と書く) 内の開集合」と解釈することができる．(**開集合**とは境界を含まない集合のことであるが，ここでは円板や四角形の内部と考えて読み進んでほしい.) 2 枚の紙片を貼り合わせる方法を分析してみよう．一方の紙片は (x, y)-平面内の開集合 U で，他方の紙片は (s, t)-平面内の開集合 V であるとし，U の糊代 U_0 と V の糊代 V_0 を貼り合わせる．U_0 の点 (x, y) を V_0 の点 (s, t) と一致するように重ねて貼り合わせると，写像 (対応) $\Phi\colon U_0 \to V_0$ が $\Phi(x, y) = (s, t)$ によって定まる．Φ は成分毎に書けば

$$\begin{cases} s = f(x, y) \\ t = g(x, y) \end{cases}$$

と表せる．ここで，位相多様体においては関数 f, g は連続関数でなければならないと約束する．(第 3 章で説明する可微分多様体では，f, g は無限回微分可能でなければならない.) U と V を貼り合わせた後の糊代 $U_0 = V_0$ 上では，(x, y)-座標と，(s, t)-座標という 2 種類の座標系がある．

2 次元位相多様体は，このような方法で，何枚かの平面 $\mathbb{R}^2$ の開集合を貼り合わせて得られるものである．ただし，2 枚の面が枝分かれするような貼り合わせ方を禁止するため，貼り合わせた紙片は曲面の開集合になっている，という条件を課す (図 2.1)．また，1 つの糊代で 3 枚以上の開集合 (紙片) を貼り合わせる場合には，3 種類の座標系の間の変数変換が矛盾なく行えるという条件を課しておく．

ところで，貼り合わせる紙片の枚数は，位相多様体本来の定義では無限枚でもよいのであるが，ホモロジー群を考えるときには，有限枚であるという仮定をおいたほうが，ずっと簡明になる．そこで，本来の位相多様体の定義よりは，若干制約が強くなるが，本書では，貼り合わせる紙片の枚数は有限枚であると仮定することにする．

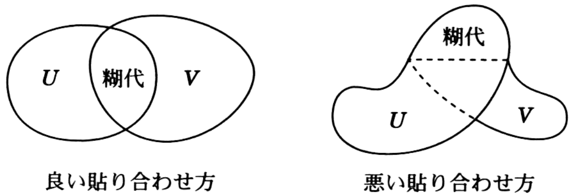


図 2.1

n 次元位相多様体の定義も，ここまでくれば容易である．まず，紙片のかわりに，何個かの $\mathbb{R}^n$ の開集合 $U_1, U_2, \cdots, U_r$ を用意する．U_i と U_j とを U_i の糊代 U_{ij} と U_j の糊代 U_{ji} で貼り合わせる場合には，同相写像 $\Phi_{ij}\colon U_{ij} \to U_{ji}$ が存在し，$\Phi_{ij}^{-1} = \Phi_{ji}$ を満たすものとする．さらに，別の U_k を同じ糊代で貼り合わせる場合には，$\Phi_{ik} = \Phi_{jk} \circ \Phi_{ij}$ が成立するものとする．また，U_i は得られた図形 $X = U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_n$ の開集合になっているとする．このとき，X を n **次元位相多様体**とよぶ．X の次元を $n = \dim X$ と表す．

つまり，位相多様体とは，各点の近くではユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ と同相になっているような図形 (位相空間) のことである．地球の表面も，自分の住んでいる近くだけを見ていれば，地表は平面のように見えるが，地球全体を見るとそうではない．n 次元位相多様体に住む生物も，自分たちのごく周辺を見る限り，そこはユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の一部のように見えるが，多様体全体はもっと複雑な形をしている可能性がある．

2.2　2 次元位相多様体のいろいろなグループ分け

長方形の長い帯を 1/2 回ねじって両端を貼り合わせて輪をつくると，メビウスの帯ができる．メビウスの帯を 1 周して元に戻ると表と裏，左と右が逆になってしまう．このように，表と裏を区別できない曲面は，**向き付け不可能**であるといい，そうでないとき，**向き付け可能**であるという．第 1 章の最後に紹介したクラインの壺も，向き付け不可能な曲面である．クラインの壺は，メビウスの帯を中に含んでいて，表裏を区別できないのである．

n 次元多様体においても，向き付け可能なものと向き付け不可能なものがあ

る．その定義は，曲面の場合から類推できるであろう (§2.9 参照)．

2 次元位相多様体 (曲面) には，ユークリッド平面 $\mathbb{R}^2$ のように開いて無限に広がっているものと，球面やトーラスのように閉じたものがある．紙片を貼り合わせて曲面を作るとき，どの紙片も周りがすべて糊代になっていて，どれか他の紙片と貼り合わされているときは，この曲面にこれ以上紙片を追加して，もっと大きい曲面にすることはできない．この状態を，曲面は**閉じている**とか**コンパクト**である，あるいは**閉曲面**であるという．

反対に，端の一部が糊代になっていない紙片が 1 枚でもあれば，そこに別の紙片を貼り合わせて，もっと大きい曲面を作ることができる．この状態を，曲面は**開いている**という．

下の図の，何個か (g 個) のドーナツをつないだ曲面は，向き付け可能な閉じている (コンパクトな) 2 次元位相多様体である．

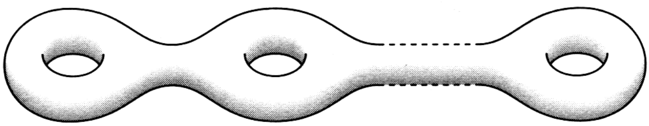


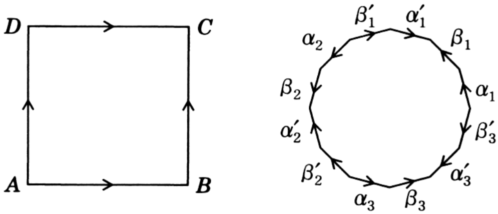
図 2.2　穴は全部で g 個

上のように g 個の穴の空いた曲面は，**種数** (ジーナス) が g の曲面であるという．ただし，球面の種数は 0，トーラスの種数は 1 と約束する．実は，向き付け可能でコンパクトな 2 次元位相多様体は，球面か，上のような種数 g の曲面に同相であることが知られている．つまり，種数 g だけで，曲面が決定される．

トーラスは，正方形 $ABCD$ の辺 $\overrightarrow{AB}$ と辺 $\overrightarrow{DC}$ を矢印の方向が一致するように貼り合わせ，辺 $\overrightarrow{BC}$ と $\overrightarrow{AD}$ を矢印の方向が一致するように貼り合わせることによって得られる (図 2.3)．

貼り合わせるときには，辺の向きに気を付ける必要がある．たとえば，同じ正方形 $ABCD$ を，辺 $\overrightarrow{AB}$ と辺 $\overrightarrow{CD}$ を矢印の方向が一致するように貼り合わせ，辺 $\overrightarrow{BC}$ と $\overrightarrow{AD}$ を矢印の方向が一致するように貼り合わせると，今度はクラインの壺ができてしまう．

種数 g ($g \geqq 2$) の向き付け可能な閉曲面は，次のように 1 枚の正 $4g$ 角形の



トーラスの展開図　　$g = 3$ の曲面の展開図

図 2.3

辺を貼り合わせることによって作ることができる．$4g$ 角形の辺を順に α_1, β_1, α'_1, β'_1, $\cdots$, α_g, β_g, α'_g, β'_g とおく．各 i に対し α_i と α'_i を向きを逆にして貼り合せ，また β_i と β'_i を向きを逆にして貼り合せる．このとき $4g$ 個の頂点はすべて 1 点にまとまる．このようにして得られる曲面は，図 2.2 と同じになることを確かめてほしい．

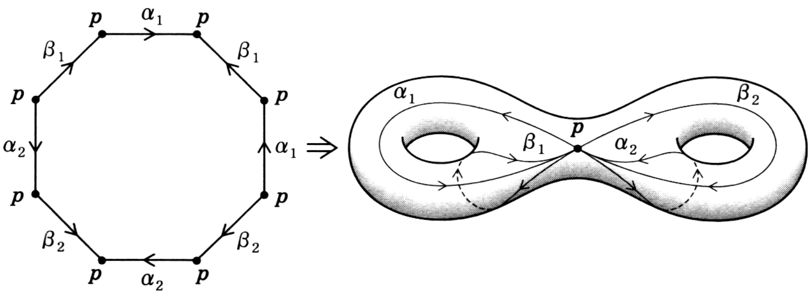


図 2.4

2.3　代数学からの準備

ここから章がすすむに従ってだんだん高度な話になっていく．そこでまず，基礎となる 2, 3 の準備をここでしておきたい．準備運動はたいがい退屈なものだけれども，長い登山に向かうためには欠かすことができない．

ホモロジー群は $H_q(X, \mathbb{Z})$ とか $H_q(X, \mathbb{R})$ などの記号で表され，その値は，

$\mathbb{Z}^r$ とか $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ とか $\mathbb{R}^q$ という記号で表されるものになる．ここで登場する $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ 等の意味について，必要最小限のことを説明する．詳細は，第 4 章で改めて説明する．

$\mathbb{Z}$ は整数の全体の集合を表す記号である．つまり $\mathbb{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$ である．この中では足し算と引き算ができ，結果は整数となる．つまり，加法と減法について閉じている．このとき $\mathbb{Z}$ は**加法群**をなすという．つまり加法を演算とする可換群である．また，集合 $\mathbb{Z}$ はかけ算についても閉じている．このように加法群でさらに乗法について閉じている数の集合を**環**という．つまり $\mathbb{Z}$ は環をなす．しかし整数同士の (0 以外の数による) 割り算の結果は分数になり，整数にならないときがある．つまり $\mathbb{Z}$ は割り算について閉じていない．しかし，有理数の全体の集合 $\mathbb{Q}$ は 0 以外の数による割り算についても閉じている．このように，0 以外の数による割り算についても閉じているとき，**体**をなすという．実数の全体の集合や，複素数の全体の集合も体をなす．これらの集合をそれぞれ $\mathbb{R}$ と $\mathbb{C}$ で表す．

これから**加群**という言葉がよく出てくる．$\mathbb{Z}$-加群とは単に加法を演算とする可換群，つまり加法群のことである．たとえば，整数を成分とする n 次元ベクトル $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 全体の集合を $\mathbb{Z}^n$ と書くが，これは $\mathbb{Z}$-加群である．

$\mathbb{R}$-加群は**実ベクトル空間** (または $\mathbb{R}$-**線形空間**)，$\mathbb{C}$-加群は**複素ベクトル空間** (または $\mathbb{C}$-**線形空間**) ともよばれる．たとえば，実数を成分とする n 次元ベクトル $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 全体の集合 $\mathbb{R}^n$ は，典型的な $\mathbb{R}$-加群である．なお，$n = \dim \mathbb{R}^n$ と書き，n を $\mathbb{R}^n$ の**次元**という．

直和記号が必要なので書いておこう．V と W を加群とするとき，V の元 v と W の元 w の組 (v, w) 全体の集合を $V \oplus W$ と表し，V と W の**直和**という．$V \oplus W$ には，普通のベクトルのように和とスカラー倍の演算を定義することができ，$V \oplus W$ も加群になる．集合としては $V \oplus W$ は直積集合 $V \times W$ と同じである．また，$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^2$, $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^3$ である．

また，実ベクトル空間の場合も，$\underbrace{\mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}}_{n\ 個}$ は実数を成分とするベクトル $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 全体の集合 $\mathbb{R}^n$ と同じである．

線形代数で商ベクトル空間を勉強したことがあるだろうか？

これはちょっと難しい (だから私もほとんど授業でやったことがない)．しかし，この商 (割り算) 抜きでは，ホモロジーの定義ができない．

V をベクトル空間とし，V の部分集合 $W \subset V$ もベクトル空間であるとする．“**商**”V/W は，V の世界で W という方向をまったく感知できない生物が見る世界である．つまり V の元 $\mathbf{v}$ は W に含まれるときは零ベクトル $\mathbf{0}$ となり，V の 2 つの元 $\mathbf{v}_1$ と $\mathbf{v}_2$ はその差が W に含まれているときは区別できない (等しい) と約束して得られる集合が V/W である．たとえば，ベクトル空間 U があって，$V = W \oplus U$ だったとしよう．W は V のなかの $(w, 0) \in W \oplus U$ という形の元の全体の集合とみなせるから部分ベクトル空間である．このとき W 成分を感知しない生物は (w, u) を単なる u として認識する．つまり $(W \oplus U)/W = U$ である．

この割り算は一般の加群で定義できる．すなわち V を加群とし，W をその部分加群とする．V/W の各元は V の元 $\mathbf{v}$ を用いて $[\mathbf{v}] \in V/W$ というように表される．この元は $\mathbf{v}$ で代表されるという．$\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \in W$ のときこれらは V/W の同じ元を代表する: $[\mathbf{v}_1] = [\mathbf{v}_2]$.

もっとも基本的な例は剰余系である．たとえば，整数全体の作る加群 $\mathbb{Z}$ の中で，8 の倍数全体のつくる部分集合を $8\mathbb{Z}$ と書く．この $8\mathbb{Z}$ は足し算や整数倍に関して閉じていてそれ自身が加群であるので，$\mathbb{Z}$ の部分加群をなす．$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ は何だろうか？　これは 2 つの整数 n と m があるとき，これらの差が 8 の倍数であるとき 2 つの数は等しい ($[m] = [n]$) と考えた集合である．したがって，$[1] = [9] = [17] = [-7] = -[7]$ であり，$[5] + [6] = [11] = [3]$, $[5] - [6] = [-1] = [7]$．このように，$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ でも足し算，引き算を行うことができる．$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ を 8 を法とする**剰余系**とよび，$[2]$ を 2 の**剰余類**という．$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ は加群である．

$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ では掛け算も行うことができ，第 4 章で説明する環というものになる．たとえば，$[5] \times [6] = [30] = [6]$, $[3] \times [3] = [9] = [1]$ である．しかし，割り算については，様子が異なる．$[3] \times [3] = 1$ なので，$\dfrac{1}{[3]} = [3]$ である．ところが，$[2] \times [4] = [8] = [0]$ なので，$[2]$ や $[4]$ の逆元 (逆数) はない．

他方，5 を法とする剰余系 $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ では，$1/[2] = [3]$, $1/[3] = [2]$, $1/[4] = [4]$ であり，$[0]$ 以外のすべての元に逆元がある．よって，$[0]$ 以外の元による割り

算についても閉じている．つまり $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ は体である．

一般に整数全体の加群 $\mathbb{Z}$ をある整数 m の倍数全体の作る部分加群 $m\mathbb{Z}$ で割ると $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ は環になるが，とくに m が素数のときには体になるのである．

もう 1 つ，加群の間の写像について準備しておく．加群 U, V があり，U の各要素 u に対し，V の要素 $f(u)$ が対応しているとする．f を関数とよんでもよいが，終域 (値域) V が数の集合でないときは f を**写像**とよぶことが多い．写像は $f\colon U \to V$ とか，$U \xrightarrow{f} V$ 等と表す．

さらに，f が加法とスカラー倍の演算を保つとき，つまり

(1) $u_1, u_2 \in U$ ならば $f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2)$

(2) $u \in U, n \in \mathbb{Z}$ ならば $f(nu) = nf(u)$

が成り立つとき，f は加群の**準同型写像**であるという．

実ベクトル空間 U, V の間の準同型写像 $f\colon U \to V$ は (2) の条件を

(2′) $u \in U, n \in \mathbb{R}$ ならば $f(nu) = nf(u)$

に変更して定義される．これは，行列で定まる 1 次変換に対応する写像である．

準同型写像 $f\colon U \to V$ に逆写像 $f^{-1}\colon V \to U$ が存在するとき，f^{-1} も準同型写像になる．このとき，f は**同型写像**であるという．このように同型写像 $f\colon U \to V$ が存在するとき，U と V は**同型**であるといい，$U \cong V$ と書く．$U = V$ と書いてしまうことも多い．

さしあたって準備はこれくらいにしてホモロジー群とコホモロジー群の話に進もう．

2.4　単体と向き，境界の対応

平面図形のなかでもっとも基本的な図形は三角形であろう．四角形も五角形も，一般に平面内の折れ線で囲まれた図形はいくつかの三角形を組み合わせて作ることができる．平面内にない曲面も，多面体の表面のように，たくさんの三角形を組み合わせれば作れそうである．したがって三角形は 2 次元多様体を組み立てる基本的なブロックと思われる．立体図形の中で三角形に対応する基本的な図形はなにかと考えると四面体だろうと思われる．3 次元多様体はいくつもの四面体を組み合わせて作れそうだ．

そこでまず四面体の観察をしよう．四面体 $ABCD$ には頂点が 4 つ，辺が 6 本，面が 4 面，そして中身である四面体の本体が 1 個ある．

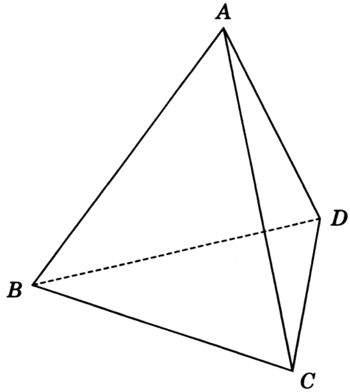


図 2.5

これら 15 個の図形はバラバラなのではなく，互いに関係しあって 1 つの四面体を形作っている．この関係は「境界になっている」という言葉で表すことができる.「a が b を境界にもっている」とき矢印で $a \to b$ と表すことにすると四面体は図 2.6 のように図解される．

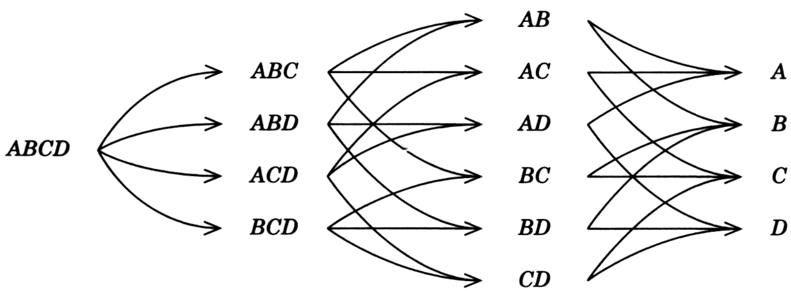


図 2.6

しかしこの図ではまだ表し切っていない情報が残っている．それは頂点の並ぶ順序 (向き) である．

辺 AB はベクトルと考えれば辺 BA とは逆を向いている．AB が含まれる直線の中でこの辺を伸縮して頂点を交換することはできない．これを辺の向きという．向きまで考えた辺を $\langle AB\rangle$ というように表そう．反対の向きは符号が逆と考えて $\langle BA\rangle = -\langle AB\rangle$ とする．

三角形はどうだろうか？　平面内に 頂点 A, B, C が反時計回りに並ぶように書いた三角形 ABC と，時計回りに並ぶように書いた三角形 ACB とは，いくら平面内で回転したり伸縮しても重ねることができない．頂点の順列 $3! = 6$ 通りのうち，ABC, BCA, CAB は互いに重ねることができ，また ACB, CBA, BAC 同士も重ねることができるが，これら 2 つのグループ間は重ねることができない．この 2 つのグループを三角形の向きという．向きまで考えた三角形を $\langle ABC\rangle$ というように表し，反対の向きは符号が逆になると考えることにする．すなわち $\langle ABC\rangle = \langle BCA\rangle = \langle CAB\rangle = -\langle ACB\rangle = -\langle BAC\rangle = -\langle CBA\rangle$ である．ここで頂点の順列において，2 つの頂点を 1 回交換するごとに向きが逆になることに注意する．すぐ後に一般次元での "三角形" $\langle A_0, \cdots, A_n\rangle$ の定義を述べるが，この場合も頂点の順列が偶数回の交換で一致するか奇数回の交換で一致するかに従って，向きが同じであるか，反対であるかを定める．

さて，四面体 $ABCD$ の境界となっている三角形の向きを観察してみよう．面である三角形 ABC は $ABCD$ の境界として，この四面体を外側から眺めたとき頂点 ABC が反時計回りに並んでいるのであって，その逆向きではない．また辺である AB は ABC の頂点の回転方向に沿った頂点の順番が与える向きになっていて，その逆でない．

この状況を上のように図解することには限界があるので，$\langle ABC\rangle$ の境界が $\langle AB\rangle$ と $\langle BC\rangle$ と $\langle CA\rangle$ であることを

$$\partial(\langle ABC\rangle) = \langle BC\rangle + \langle CA\rangle + \langle AB\rangle$$

と表すことにする．このことは

$$\partial(\langle ABC\rangle) = \langle BC\rangle - \langle AC\rangle + \langle AB\rangle$$

と書くこともできる．この境界を表す記号 ∂ を**境界作用素**とよぶ．線分 AB

に対しては $\partial(\langle AB\rangle)=\langle B\rangle-\langle A\rangle$ などと考える．頂点の境界は 0 であると約束する．

$$\partial(\langle A\rangle)=0$$

このように向きまで考えて正負の符号付きで扱う効用は大きい．たとえば

$$\begin{aligned}&\partial(\langle BC\rangle+\langle CA\rangle+\langle AB\rangle)\\&=(\langle C\rangle-\langle B\rangle)+(\langle A\rangle-\langle C\rangle)+(\langle B\rangle-\langle A\rangle)\\&=0\end{aligned}$$

と計算されるが，これは三角形 ABC の縁が一つながりの輪状であって，端点が無いことを表している．

さて，この状況は一般の n 次元で考えることができる．頂点，辺，三角形，四面体などは，それぞれの次元でもっとも基本的な図形と考えられるので**単体**とよばれる．頂点は 0 次元単体，辺は 1 次元単体，三角形は 2 次元単体，四面体は 3 次元単体である．

一般の n 次元単体は次のように与えることができる．

$\mathbb{R}^n$ 内で $n+1$ 個の点 $A_0(0,\cdots,0)$, $A_1(1,0,\cdots,0)$, $A_2(0,1,0,\cdots,0)$, $\cdots$, $A_n(0,0,\cdots,1)$ を頂点とする最小の凸多面体

$$\Delta^n=\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n\ \middle|\ \begin{array}{l}x_1\geqq 0,\ x_2\geqq 0,\ \cdots,\ x_n\geqq 0,\\ x_1+x_2+\cdots+x_n\leqq 1\end{array}\right\}$$

が n **次元単体** (略して n-**単体**) である．これを向きも考えて $\langle A_0A_1\cdots A_n\rangle$ などと表す．

$A_0,\cdots,A_n$ から $q+1$ 個の頂点を選んでできる q 次元の単体を n 次元単体 $\langle A_0A_1\cdots A_n\rangle$ の q **次元の面**という．0 次元の面は頂点，1 次元の面は辺のことである．$n-1$ 次元の面を単に**面**とよぶこともある．

n 次元単体に対する境界作用素 ∂ は

$$\partial(\langle A_0A_1\cdots A_n\rangle)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\langle A_0\cdots A_{i-1}A_{i+1}\cdots A_n\rangle$$

で定義される．これは n 次元単体の表面になっている $n+1$ 個の $n-1$ 次元の単

体に，整合的に向きを与えて作った和である．このとき，$\partial(\partial(\langle A_0A_1\cdots A_n\rangle))=0$ が成立する．たとえば，2 次元単体 (三角形) $\langle ABC\rangle$ の場合，

$$\begin{aligned}&\partial(\partial(\langle ABC\rangle))\\&=\partial(\langle BC\rangle-\langle AC\rangle+\langle AB\rangle)\\&=\partial(\langle BC\rangle)-\partial(\langle AC\rangle)+\partial(\langle AB\rangle)\\&=(\langle C\rangle-\langle B\rangle)-(\langle C\rangle-\langle A\rangle)+(\langle B\rangle-\langle A\rangle)\\&=0\end{aligned}$$

である．$\langle ABC\rangle$ に 1 回境界作用素 ∂ を施すと，1 つ次元の低い境界が得られるが，得られる境界自体はすでに切れ目なくつながっていて縁が無いから，もう一度境界作用素を施しても何も出てこないのである．

2.5 単体分割とホモロジー群

多面体の表面は，各面を何個かの三角形に分割することによって，三角形を組み合わせてできる図形と考えることができる．したがって，位相的に多面体と同相な曲面は，何個かの三角形 (と同相な集合) に分割することができる．これを，曲面の**単体分割**，または**三角形分割**という．もちろん，曲面を三角形分割する方法は何通りもある．

同様に，n 次元位相多様体も n 次元単体と同相な図形によって分割されているとして，単体同士のつながりかたから全体の形を調べようと考えることは自然である．このつながり方を調べる手段は前節に述べた境界作用素であるので，これがうまく定義できるように，単体による分割の方法に若干の制限をつける．簡単のため，曲面の三角形分割の場合に述べる．

図 2.7 のように，曲面を何個かの三角形 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_k$ に分割するとき，各三角形の頂点は，他の三角形の頂点と一致していることだけが許され，他の三角形の辺の内部にあってはならない．

n 次元位相多様体の単体分割においても，次元の低い単体は，それより次元の大きい他の単体の内部にあってはならないものとする．

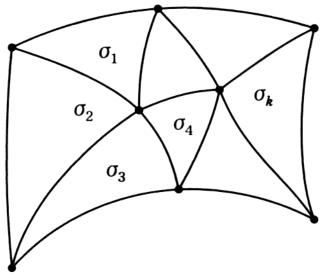


図 2.7

曲面 X を k 個の三角形 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_k$ に分割する．これらの三角形の辺として現れる線分全体を $\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_l$ とする．ただし，τ_i は 2 個の三角形の共通辺になっていることもある．さらに，三角形の頂点全体を $p_1, p_2, \cdots, p_m$ とする．これらの三角形，辺にはあらかじめ適当に向きを決めておく．

$$C_2 = \mathbb{Z}\sigma_1 \oplus \mathbb{Z}\sigma_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\sigma_k$$

$$C_1 = \mathbb{Z}\tau_1 \oplus \mathbb{Z}\tau_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\tau_l$$

$$C_0 = \mathbb{Z}p_1 \oplus \mathbb{Z}p_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}p_m$$

とする．ただし，

$$\mathbb{Z}\sigma = \left\{ n\sigma \;\middle|\; n \in \mathbb{Z} \right\}$$

であり，加群としては $\mathbb{Z}$ と同型である．したがって，C_2 は，

$$a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 + \cdots + a_k\sigma_k \qquad (a_i \text{ は整数})$$

という形に表せる元全体の集合である．単体の境界をとる写像 ∂ は，準同型写像 $\partial_2\colon C_2 \to C_1$, $\partial_1\colon C_1 \to C_0$ に拡張できる．たとえば，

$$\partial_2(a_1\sigma_1 + \cdots + a_k\sigma_k) = a_1\partial(\sigma_1) + \cdots + a_k\partial(\sigma_k)$$

である．

n 次元位相多様体 X を n 次元の単体 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_k$ に分割した場合も，σ_i 達の q 次元の面として現れる q 次元の単体全体を $\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_l$ とし，

$$C_q = \mathbb{Z}\tau_1 \oplus \mathbb{Z}\tau_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\tau_l$$

として，q 次元の鎖体の集合 C_q を定義する．この場合も，∂ により，写像 $\partial_q\colon C_q \to C_{q-1}$ が定まる．この ∂_q を**境界作用素**という．

形式的に，$q > n = \dim X$ または $q < 0$ のときは $C_q = \{0\}$ とおく．今後，集合 $\{0\}$ は単に 0 と書くことも多い．$q > n$ や，$q \leqq 0$ のときも，$\partial_q\colon C_q \to C_{q-1}$ は任意の $c \in C_q$ に対し $\partial_q(c) = 0$ として定義する．

このとき，すべての整数 q に対し，$\partial_{q-1}(\partial_q(c)) = 0$ が成り立つ．このことを，$\partial_{q-1} \circ \partial_q = 0$ とも書く．このとき，

$$0 \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} C_{n-2} \xrightarrow{\partial_{n-2}} \cdots \xrightarrow{\partial_3} C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0$$

を複体という．

左端の 0 は $C_{n+1} = \{0\}$ という意味で，$n+1$ 次元単体が無いことを表している．右端の 0 は $C_{-1} = \{0\}$ という意味である．

この加群と写像の系列の特徴は，境界作用素を 2 回続けるといつも 0 になることである．

一般に，加群 C_q $(q \in \mathbb{Z})$ と準同型写像 $\partial_q\colon C_q \to C_{q-1}$ $(q \in \mathbb{Z})$ が与えられ，すべての q に対し $\partial_{q-1} \circ \partial_q = 0$ を満たすとき，

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{q+1}} C_q \xrightarrow{\partial_q} C_{q-1} \xrightarrow{\partial_{q-1}} C_{q-2} \xrightarrow{\partial_{q-2}} \cdots$$

を**複体**といい，記号 C_* 等で表す．

上のように，位相多様体の単体分割によって得られる複体を**単体的複体**という．これはポアンカレが初めてホモロジー群を定義したときに用いた複体で，図形的に分かり易い．

さて，ホモロジー群を定義しよう．C_q の元 z (これを q 次元鎖体という) で境界作用素を施すと 0 になるものを **q 次元サイクル (輪体)** とよび，その全体を $Z_q(C_*)$ で表す．すなわち

$$Z_q(C_*) = \left\{ z \in C_q \;\middle|\; \partial_q(z) = 0 \right\}$$

である．たとえば，三角形 $\langle ABC \rangle$ の境界 $z = \langle AB \rangle + \langle BC \rangle + \langle CA \rangle$ は，$\partial_1(z) = 0$ を満たすからサイクル (輪体) であるが，これは文字通り "輪"(英語

で cycle) になっている．これが “輪体”(サイクル) の名前の由来である．

つぎに，$q+1$ 次元鎖体 $c \in C_{q+1}$ の境界として得られる q 次元鎖体 $b = \partial_{q+1}(c)$ を q **次元境界サイクル**といい，その全体を $B_q(C_*)$ で表す．すなわち

$$B_q(C_*) = \left\{ \partial_{q+1}(c) \in C_q \;\middle|\; c \in C_{q+1} \right\}$$

である．$b \in B_q(C_*)$, $b = \partial_{q+1}(c)$ ならば，$\partial_q(b) = \partial_q(\partial_{q+1}(c)) = 0$ だから，b は $Z_q(C_*)$ に属する．よって，

$$B_q(C_*) \subset Z_q(C_*)$$

であり，$Z_q(C_*)$ は C_q の部分加群，$B_q(C_*)$ は $Z_q(C_*)$ の部分加群になっている．

C_* の q **次元ホモロジー群** $H_q(C_*)$ は，

$$H_q(C_*) = Z_q(C_*)/B_q(C_*)$$

で定義される．q 次元サイクル $z \in Z_q(C_*)$ から定まる $H_q(C_*)$ の元を $[z]$ と書き，z の定める**ホモロジー類**とよぶ．$H_q(C_*)$ の各元は，ある q 次元サイクル $z \in Z_q(C_*)$ から定まるホモロジー類 $[z]$ になっている．

2 つの q 次元サイクル z_1 と z_2 は，その差が q 次元境界サイクルとなっているとき，つまり $z_1 - z_2$ がある $q+1$ 次元鎖体の境界となっているときに，$[z_1] = [z_2]$ であり，同じホモロジー類になる．このとき z_1 と z_2 とは**ホモロガス**であるという．

$$[z_1] = [z_2] \iff z_1 - z_2 = \partial_{q+1}(c) \ (\exists c \in C_{q+1})$$

複体 C_* は，位相多様体 X の単体分割の方法によって，いろいろなものが作れる．X の単体分割の仕方を変えると C_* が変わるから，それに応じて $Z_q(C_*)$ と $B_q(C_*)$ は変わってしまう．しかし，驚くべきことに，ホモロジー群 $H_q(C_*)$ は X をどのように単体分割しても，常に同じものが得られる．

$Z_q(C_*)$ と $B_q(C_*)$ が変わっても，その変わり方が割り算 $Z_q(C_*)/B_q(C_*)$ を行うことにより相殺されて，その商 $H_q(C_*)$ は一定のものになるのである．しかし，このことのきちんとした証明は，かなり厄介であるので，ここでは述

べられない．

$H_q(C_*)$ は単体分割によって定まる複体 C_* に依存しないので，$H_q(C_*)$ を

$$H_q(X, \mathbb{Z})$$

と書くことにし，X の (整数係数) q 次**ホモロジー群**とよぶ．ここで $\mathbb{Z}$ を書くのは，C_q が q 次元単体を基底とする $\mathbb{Z}$ 加群

$$C_q = \mathbb{Z}\tau_1 \oplus \mathbb{Z}\tau_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\tau_l$$

であったことに由来する．C_q の定義を，

$$C_q = \mathbb{R}\tau_1 \oplus \mathbb{R}\tau_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}\tau_l$$

と変更して得られるホモロジー群は $H_q(X, \mathbb{R})$ と書かれる．$\mathbb{Z}$ を $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ や $\mathbb{Q}$ や $\mathbb{C}$ に変更した場合も同様である．

このホモロジー群が単体分割に依存しないことは，あとで述べる特異ホモロジー群についてのより強い主張 (ホモトピー不変性) からも導かれる．

2.6 ホモロジー群の計算例

単体分割を利用して，円周と，トーラスのホモロジー群を計算する．

まず，円周 S^1 から始める．S^1 は正 n 角形 $A_1A_2\cdots A_n$ の周と同相であるから，これを用いて単体分割する．以下，$A_{n+i} = A_i$ と約束しておく．n 本の辺 $\tau_i = \langle A_i A_{i+1} \rangle$ が 1 次元単体，n 個の頂点 $\langle A_i \rangle$ が 0 次元単体である．よって，

$$C_1 = \mathbb{Z}\tau_1 \oplus \mathbb{Z}\tau_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\tau_n$$

$$C_0 = \mathbb{Z}\langle A_1 \rangle \oplus \mathbb{Z}\langle A_2 \rangle \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\langle A_n \rangle$$

であり，$\partial_1(\tau_i) = \langle A_{i+1} \rangle - \langle A_i \rangle$ によって，境界作用素 $\partial_1 \colon C_1 \to C_0$ が定まっている．

$C_2 = 0$ だから，$B_1(C_*) = 0$ であり，$C_{-1} = 0$ だから，$Z_0(C_*) = C_0$ である．輪体 $Z_1(C_*)$ の元は n 角形の周の定数倍 $k(\tau_1 + \tau_2 + \cdots + \tau_n)$ $(k \in \mathbb{Z})$

しかないので，

$$Z_1(C_*) = \mathbb{Z}(\tau_1 + \tau_2 + \cdots + \tau_n) \cong \mathbb{Z}$$

である．よって，

$$H_1(S^1, \mathbb{Z}) = Z_1(C_*)/B_1(C_*) \cong \mathbb{Z}/\{0\} = \mathbb{Z}$$

であり，$H_1(S^1, \mathbb{Z})$ の元はホモロジー類 $[\tau_1 + \tau_2 + \cdots + \tau_n]$ の整数倍である．つまり，幾何的には，$H_1(S^1, \mathbb{Z})$ は多角形の周，つまり円周の整数倍全体の集合である．

$B_0(C_*)$ は $\partial_1(\tau_i) = \langle A_{i+1}\rangle - \langle A_i\rangle$ という形の元をすべて含むので，$H_0(S^1, \mathbb{Z}) = Z_0(C_*)/B_0(C_*) = C_0/B_0(C_*)$ においては，$[A_1] = [A_2] = \cdots = [A_n]$ が成り立つ．C_0 の基底は $\langle A_1\rangle, \langle A_2\rangle, \cdots, \langle A_n\rangle$ であったから，結局

$$H_0(S^1, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$$

となる．幾何的には，これは 1 点 $[A_i]$ の整数倍全体の集合である．

$H_1(S^1, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $H_0(S^1, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ という結果は，n の値に依存しない．このことも，ホモロジー群 $H_q(S^1, \mathbb{Z})$ が単体分割の方法に依存しないことの一例になっている．

実は，$n = 1$ のときは，S^1 の単体分割ではなく，**胞体分割**とよばれるものにしかならないのだが，それでもホモロジー群は正しく計算できるのである．

次に，トーラス T^2 のホモロジー群を計算する．トーラス T^2 は，正方形 $ABCD$ の辺 $\overrightarrow{AB}$ と辺 $\overrightarrow{DC}$ を矢印の方向が一致するように貼り合わせ，辺 $\overrightarrow{BC}$ と $\overrightarrow{AD}$ を矢印の方向が一致するように貼り合わせることによって得られた．

四角形 $ABCD$ を対角線 AC で 2 分して 2 つの三角形 ABC と CDA に分割する．トーラス T^2 では，三角形 ABC の 3 頂点が 1 点に重なってしまうから，これは厳密にいうとトーラスの三角形分割ではなく，もっと細かく分割しないと，本当の三角形分割にはならない．しかし，細かく分割すると，書いたときごちゃごちゃするので，気持ちをおおらかに持って，図 2.8 の左図でホモロジー群を計算してしまおう．これでも，正しいホモロジー群が計算できることは，胞体のホモロジー理論というものによって保証されている．

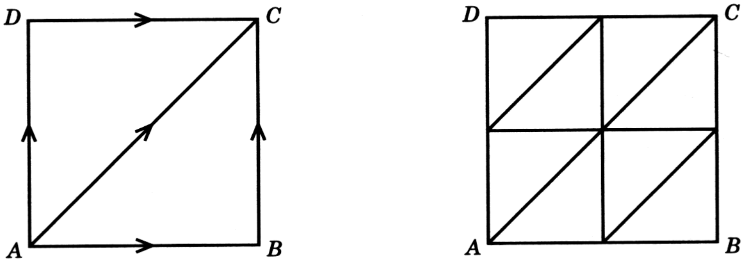


図 2.8

$$\sigma_1 = \langle ABC \rangle, \quad \sigma_2 = \langle CDA \rangle,$$

$$\tau_1 = \langle AB \rangle = \langle DC \rangle, \quad \tau_2 = \langle BC \rangle = \langle AD \rangle, \quad \tau_3 = \langle AC \rangle,$$

$$p = \langle A \rangle = \langle B \rangle = \langle C \rangle = \langle D \rangle$$

とおく．

$$\partial_2(\sigma_1) = \tau_1 + \tau_2 - \tau_3, \quad \partial_2(\sigma_2) = -\tau_1 - \tau_2 + \tau_3,$$

$$\partial_1(\tau_1) = \partial_1(\tau_2) = \partial_1(\tau_3) = p - p = 0$$

である．これらより，

$$Z_2(C_*) = \mathbb{Z}(\sigma_1 + \sigma_2), \quad B_2(C_*) = 0,$$

$$Z_1(C_*) = \mathbb{Z}\tau_1 \oplus \mathbb{Z}\tau_2 \oplus \mathbb{Z}\tau_3, \quad B_1(C_*) = \mathbb{Z}(\tau_1 + \tau_2 - \tau_3),$$

$$Z_0(C_*) = \mathbb{Z}p, \quad B_0(C_*) = 0$$

となる．$B_1(C_*) = \mathbb{Z}(\tau_1 + \tau_2 - \tau_3)$ は $H_1(T^2, \mathbb{Z})$ において $[\tau_3] = [\tau_1] + [\tau_2]$ を意味することに注意すると，

$$H_2(T^2, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[\sigma_1 + \sigma_2] \cong \mathbb{Z},$$

$$H_1(T^2, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[\tau_1] \oplus \mathbb{Z}[\tau_2] \cong \mathbb{Z}^2,$$

$$H_0(T^2, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[p] \cong \mathbb{Z}$$

であることがわかる．ここで，$H_2(T^2, \mathbb{Z})$ の生成元 $[\sigma_1 + \sigma_2]$ はトーラスの表

面全体であり，$H_1(T^2, \mathbb{Z})$ の生成元 $[\tau_1], [\tau_2]$ はトーラスを 1 周する 2 つの曲線であることに注意しよう．

種数 g の向き付け可能な閉曲面 X_g についても次の方針でホモロジー群を計算できる．前に説明したように，X_g を正 $4g$ 角形に展開し，その中心と頂点を結んで $4g$ 個の三角形に分割する．これも，やはり単体分割ではなく胞体分割であるが，ホモロジー群は単体分割の場合と同じものが得られる．

この分割により，$4g$ 個の 2 次元単体と，$6g$ 個の 1 次元単体と，2 個の頂点からなる複体ができる．$4g$ 個すべての三角形 (2 次元単体) の和を σ とすれば，

$$\partial_1(\sigma) = \alpha_1 + \beta_1 - \alpha_1 - \beta_1 + \cdots = 0$$

となり，あとは機械的な計算で，

$$H_2(X_g, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[\sigma] \cong \mathbb{Z}$$

$$H_1(X_g, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[\alpha_1] \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}[\alpha_g] \oplus \mathbb{Z}[\beta_1] \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}[\beta_g] \cong \mathbb{Z}^{2g}$$

$$H_0(X_g, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[p] \cong \mathbb{Z}$$

が得られる．これは球面 $(g = 0)$ の場合でも成立する．

2.7　位相空間のホモロジー群

上で述べたホモロジー群の定義は対象が単体分割できる多様体に限られていたし，ホモロジー群が単体分割に依存せずに多様体のみで決まることも自明ではなかった．ホモロジー群を定義するための複体の作り方は上に述べた単体的複体だけではなく，種々の方法がある．種々の方法で定義される複体はもちろん異なるが，同じホモロジー群ができるという点がポイントである．それぞれの複体の構成は，考察する多様体のある構造を反映する方法でなされる．

この節では，もっとも広い範囲の "図形" の概念である位相空間に対して複体を定義する方法を説明する．位相空間を知らない人も心配する必要はない．ユークリッド空間の部分集合はすべて位相空間であるので，そういうものを考えてもらえばよい．単体分割可能な図形に関しては，この複体の定めるホモロジー群は，上に述べた単体的複体から決まるホモロジー群と一致する．これか

ら説明するように，同相な 2 つの位相空間から作られる複体は同型であり，したがってホモロジー群も同型になる．これから述べるのは特異ホモロジー群とよばれるもので，理論構成が明解なので位相幾何学の教科書でもよく採用されている．しかし単体分割を用いた上の方法と比べて，イメージがつかみ難い点，それから，どうしたら計算できるかがすぐには分からない点が欠点である．細部にはあまりこだわらず，こうやってやるのか，という流れをつかんでいただければ嬉しい．

X を位相空間，$\varDelta^q$ を q 次元単体とする．連続写像 $\sigma^q\colon \varDelta^q \to X$ のことを X の**特異 q-単体**とよぶ．ここで特異という言葉はきれいな三角形や四面体として X 中に入っているとは限らないということを表している．σ^q は単なる連続写像なので，その像 $\sigma^q(\varDelta^q)$ は自分自身にぶつかったり，つぶれたり，ぐしゃぐしゃになったりしても OK という意味である．2 つの特異 q-単体が等しいとは，連続写像として完全に一致することと約束する．

そこで各非負整数 q に対して，X の特異 q 次元鎖群とよばれる加群 $S_q(X)$ を，有限個の特異 q-単体 $\sigma_1^q, \sigma_2^q, \cdots, \sigma_r^q$ を用いて

$$c = c_1\sigma_1^q + c_2\sigma_2^q + \cdots + c_r\sigma_r^q \qquad (c_i \in \mathbb{Z})$$

と表されるような c の全体の集合として定義する．つまり各特異 q-単体の 1 つ 1 つが基底となっている整数を成分とするベクトル全体の集合である．また負の整数 q に対しては $S_q(X) = \{0\}$ と定めておく．

たぶんここで分からなくなる．いったい特異 q-単体，つまり連続写像 $\sigma^q\colon \varDelta^q \to X$ はどんなものがどれくらいあるのだろうか?? $\cdots$ こう考えてしまうとたぶん誰にも分からない．一般の連続写像は想像を絶している．たとえば「ペアノ曲線」などという例もあって，特異 1-単体の像は曲面的にも立体的にもなりうる．しかし大事なのはこのように考えないことである．大切なのは連続写像という言葉しか使わない上に述べた定義の仕方であって，$S_q(X)$ を実感することではない．実際，この恐ろしく巨大な群は誰にも実感できないし，そしてもっとも大事なのは，ホモロジー群をとる段階で，この群のわかりにくい巨大さの部分は削り落とされてしてしまうという点である．悩まずに読み進んで欲しい．

境界作用素 $\partial_q\colon S_q(X) \to S_{q-1}(X)$ は単体的複体のときの定義と基本的に同じである．

$$\partial_q(\sigma^q) = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \sigma_i^{q-1}$$

ここで σ_i^{q-1} は σ^q の第 i 番目の面で，これは q 次元単体 $\Delta^q = \langle A_0 A_1 \cdots A_q \rangle$ の頂点 A_i の対面になっている $q-1$ 次元単体 $\Delta^{q-1} = \langle A_0 \cdots A_{i-1} A_{i+1} \cdots A_q \rangle$ 上に写像 σ^q を制限して得られる写像 $\sigma_i^{q-1}\colon \Delta^{q-1} \to X$ である．

また，$\partial_{q-1} \circ \partial_q = 0$ が以前と同じように成立し，複体 $S_*(X)$

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{q+1}} S_q(X) \xrightarrow{\partial_q} S_{q-1}(X) \xrightarrow{\partial_{q-1}} S_{q-2}(X) \xrightarrow{\partial_{q-2}} \cdots$$

が得られる．これを X の特異 (鎖) 複体とよぶ．

定義 (特異ホモロジー群)

位相空間 X に対し，その特異複体 $S_*(X)$ のホモロジー群を X の**特異ホモロジー群**といい $H_*(X)$ とか $H_*(X, \mathbb{Z})$ と書く．すなわち

$$Z_q(X) = \{ z \in S_q(X) \mid \partial_q(z) = 0 \}$$

$$B_q(X) = \{ \partial_{q+1}(c) \in S_q(X) \mid c \in S_{q+1}(X) \}$$

$$H_q(X, \mathbb{Z}) = H_q(X) = Z_q(X)/B_q(X)$$

である．

2 つの空間 X, Y と連続写像 $f\colon X \to Y$ があるとき，2 つのホモロジー群 $H_q(X), H_q(Y)$ の間に準同型写像 $f_q\colon H_q(X) \to H_q(Y)$ が自然に定義される．すなわち，X の q 次元特異単体 $\sigma^q\colon \Delta^q \to X$ に対して Y の q 次元特異単体 $f_q(\sigma^q)\colon \Delta^q \to Y$ を写像の合成 $f_q(\sigma^q) = f \circ \sigma^q$ によって定義することができる．この $f_* = \{ f_q \mid q \in \mathbb{Z} \}$ を連続写像 f の誘導するホモロジー群の準同型写像とよぶ．

特異ホモロジー群が空間 X の位相タイプだけによって決まることはすぐわかるが，実はさらにホモトピータイプだけで決まる．2 つの空間 X と Y が同じ**ホモトピータイプ**をもつ，あるいは**ホモトピー同値**とは連続写像 $f\colon X \to Y$ と $g\colon Y \to X$ があって合成写像 $X \ni x \mapsto g(f(x)) \in X$ と $Y \ni y \mapsto f(g(y)) \in$

Y がそれぞれの空間で連続的に変形して恒等写像 $X \in x \mapsto x \in X$ と $Y \ni y \mapsto y \in Y$ にできる (写像としてホモトピックという) ときをいう．f と g が互いに本当の逆写像にとれるときが同相写像で，このとき合成写像は始めから恒等写像になっている: $g(f(x)) = x$, $f(g(y)) = y$. したがってホモトピー同値であるほうが同相であることよりずっと広い (図 2.9).

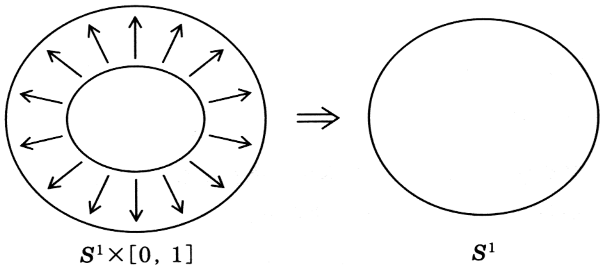


図 2.9

たとえば，1 点 P のみからなる位相空間のホモロジー群は，

$$H_q(P, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & (q = 0 \text{ の場合}) \\ 0 & (q \neq 0 \text{ の場合}) \end{cases}$$

である．このことは，単体分割のホモロジー群を利用しても計算できる．n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ は 1 点 $\{P\}$ とホモトピー同値である．よって，

$$H_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & (q = 0 \text{ の場合}) \\ 0 & (q \neq 0 \text{ の場合}) \end{cases}$$

である．

一般には，特異ホモロジー群を $Z_q(X)$, $B_q(X)$ を直接計算して求めることは容易でない．そのかわり，特異ホモロジー群には，完全系列とよばれるものを利用して計算できるという長所がある．完全系列の詳しい説明は第 4 章でするから，ここでは最小限必要な定義だけ与えておく．

V_i $(i \in \mathbb{Z})$ が加群で，その間の準同型写像からなる系列

$$\cdots \to V_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} V_i \xrightarrow{f_i} V_{i-1} \to \cdots$$

が**完全系列**であるとは，各 $i \in \mathbb{Z}$ に対し，

$$\{f_{i+1}(x) \mid x \in V_{i+1}\} = \{y \in V_i \mid f_i(y) = 0\}$$

が成り立つことをいう．上式の左辺を $\operatorname{Im} f_{i+1}$，右辺を $\operatorname{Ker} f_i$ と書く．参考までに，

$$Z_q(X) = \operatorname{Ker}\partial_q, \quad B_q(X) = \operatorname{Im}\partial_{q+1}, \quad H_q(X, \mathbb{Z}) = \operatorname{Ker}\partial_q / \operatorname{Im}\partial_{q+1}$$

であることに注意しておこう．

ここでは，**マイヤー・ヴィートリス完全系列**を紹介する．この完全系列だけでもかなりの空間のホモロジー群が計算できる．

位相空間 X が 2 つの部分集合 U と V の和集合 $X = U \cup V$ として与えられている状況を考える．(ただしあんまりワイルドな状況ではうまくいかないことがあり，したがって適当な仮定をおく必要があるが，細かくなるので述べない．目で見えるような分割なら，たいてい大丈夫である．)

このとき，次の完全系列ができる (マイヤー・ヴィートリス完全系列).

$$\begin{aligned}
\cdots &\to H_{q+1}(U \cap V) \to H_{q+1}(U) \oplus H_{q+1}(V) \to H_{q+1}(U \cup V) \\
&\to H_q(U \cap V) \to H_q(U) \oplus H_q(V) \to H_q(U \cup V) \\
&\to \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\to H_2(U \cap V) \to H_2(U) \oplus H_2(V) \to H_2(U \cup V) \\
&\to H_1(U \cap V) \to H_1(U) \oplus H_1(V) \to H_1(U \cup V) \\
&\to H_0(U \cap V) \to H_0(U) \oplus H_0(V) \to H_0(U \cup V) \to 0
\end{aligned}$$

完全系列を用いた計算は，第 4 章で改めて扱うが，これを用いて，たとえば n 次元球面 $(n \geqq 1)$

$$S^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$$

のホモロジー群を求めてみる．$n = 1$ の場合は単体分割を用いてすでに求めてあるから，n に関する帰納法で，

$$H_q(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & (q=0,\ q=n \text{ の場合}) \\ 0 & (\text{上記以外の場合}) \end{cases}$$

となることを証明する．$n \geqq 2$ とする．

$$U = \{(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}) \in S^n \mid x_{n+1} \geqq 0\} \qquad (\text{北半球})$$

$$V = \{(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}) \in S^n \mid x_{n+1} \leqq 0\} \qquad (\text{南半球})$$

とおく．$S^n = U \cup V$, $U \cap V = S^{n-1}$ に注意する．また各半球 U, V は連続的に 1 点に縮めることができるので 1 点とホモトピー同値である．よって，

$$H_q(U) = H_q(V) = \begin{cases} \mathbb{Z} & (q=0 \text{ の場合}) \\ 0 & (q \neq 0 \text{ の場合}) \end{cases}$$

$$H_q(U \cap V) = H_q(S^{n-1}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & (q=0,\ q=n-1 \text{ の場合}) \\ 0 & (\text{上記以外の場合}) \end{cases}$$

となる．マイヤー・ヴィートリス完全系列

$$H_q(U) \oplus H_q(V) \to H_q(U \cup V) \to H_{q-1}(U \cap V) \to H_{q-1}(U) \oplus H_{q-1}(V)$$

の部分から q が 2 以上のときには完全系列

$$0 \to H_q(S^n) \to H_{q-1}(S^{n-1}) \to 0$$

を得る．これは $H_q(S^n) = H_{q-1}(S^{n-1})$ であることを意味する (第 4 章参照)．このように $q = 0, 1$ の場合も計算すると，上の結果を得る．

2.8 コホモロジー環

以下では今まで加群としてきた部分を実ベクトル空間に限定して考えることにする．加群準同型写像とはこの場合線形写像である．一般の加群では巡回的な $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ のようなもの (トージョン加群という) が現れるが，ベクトル空間では $\mathbb{R}/m\mathbb{R} = \{0\}$ となるので，このようなものは現れない．実数係数ホモロジー群 $H_*(X, \mathbb{R})$ は実ベクトル空間であって，$H_q(X, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^d$ (d はある整数) となる．

コホモロジーはホモロジーと双対的に定義される．双対空間の定義からはじめよう．実ベクトル空間 V に対して，その**双対空間** V^* を V 上の線形写像 $f\colon V \to \mathbb{R}$ の全体として定義する．つまり，§4.1 の記号で書けば

$$V^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{R})$$

V が d 次元の列ベクトルの全体とすると，V^* は d 次元の行ベクトルで表される．つまり，$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}$, $f = (a_1, a_2, \cdots, a_d) \in V^*$ に対し

$$f(\mathbf{x}) = f\mathbf{x} = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_dx_d$$

として，行ベクトルを線形写像と同一視する．

一般に V が有限次元ベクトル空間であれば，双対空間 V^* も同じ次元のベクトル空間であり，V と V^* は同型である．しかし，この同型写像 $V \to V^*$ は，基底の選び方に依存し，一意的には定まらない．他方，同型写像 $V \to (V^*)^*$ は基底に依存せず標準的に定めることができる．そこで，$(V^*)^* = V$ と考える．($\dim V = \infty$ の場合は，この等式は成り立つとは限らない)

$\phi\colon V \to W$ を線形写像とする．W の双対空間 W^* の元，すなわち線形写像 $\alpha\colon W \to \mathbb{R}$ に対して，ϕ との合成 $\alpha \circ \phi\colon V \to \mathbb{R}$ によって V^* の元を得る．これを ϕ の**双対線形写像**とよび $\phi^*\colon W^* \to V^*$ と書く．すなわち $\mathbf{v} \in V$ に対して $\phi^*(\alpha)(\mathbf{v}) = \alpha(\phi(\mathbf{v}))$ である．ここで写像 ϕ^* の方向が ϕ と逆になったことに注目して欲しい．$\phi\colon V \to W$ が行列 A で表される線形写像ならば，$\phi^*\colon W^* \to V^*$ は A の転置行列で表される線形写像である．

複体 C_* (単体的複体でも特異複体でも何でもよい) が与えられると，標準的に双対複体を作ることができる．複体

$$(C_*) \quad 0 \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} C_{n-2} \xrightarrow{\partial_{n-2}} \cdots \xrightarrow{\partial_3} C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0$$

において，各 C_q は実ベクトル空間で，∂_q は線形写像であるとする．C_q の双対空間 $(C_q)^*$ を C^q と書くことにし，$\partial_q\colon C_q \to C_{q-1}$ の双対線形写像を

$\delta^{q-1} = (\partial_q)^*$ とする．すると，

$$(C^*) \quad 0 \xrightarrow{\delta^{-1}} C^0 \xrightarrow{\delta^0} C^1 \xrightarrow{\delta^1} C^2 \xrightarrow{\delta^2} \cdots \xrightarrow{\delta^{n-3}} C^{n-2} \xrightarrow{\delta^{n-2}} C^{n-1} \xrightarrow{\delta^{n-1}} C^n \xrightarrow{\delta^n} 0$$

というベクトル空間と線形写像の系列ができ，$\delta^{q+1} \circ \delta^q = 0$ を満たす．このような (C^*) を，**コホモロジー複体**とよび，それに対し，今までの複体 (C_*) を**ホモロジー複体**とよぶ．また，(C_*) と (C^*) は互いに**双対複体**であるという．

コホモロジー複体 (C^*) に対し，C^* の q 次コホモロジー群 $H^q(C^*, \mathbb{R})$ を

$$Z^q(C^*, \mathbb{R}) = \operatorname{Ker} \delta^q$$
$$B^q(C^*, \mathbb{R}) = \operatorname{Im} \delta^{q-1}$$
$$H^q(C^*, \mathbb{R}) = Z^q(C^*, \mathbb{R}) / B^q(C^*, \mathbb{R})$$

で定義する．($\mathbb{R}$ は省略して書くことも多い)

コホモロジー群は要するにホモロジー群の双対加群ではないか，という気がしてくると思う．これはベクトル空間に話を限ると正しい．つまり，

$$H^q(C^*, \mathbb{R}) = (H_q(C_*, \mathbb{R}))^*, \quad H_q(C_*, \mathbb{R}) = (H^q(C^*, \mathbb{R}))^*$$

これを，**普遍係数定理**という．コホモロジーは，$\mathbb{R}$ を $\mathbb{Z}$ 等に変えても定義することができるが，このとき，上の等式は成立するとは限らない．

実係数コホモロジー群がホモロジー群の双対空間ならば，特にベクトル空間としてはホモロジー群と同型で，なぜこのようなものを考えるメリットがあるのだろうか？　それはコホモロジー群では積が定義されて (非可換) 環の構造を持つからである．この環の掛け算は**カップ積**とよばれ，以下のように定義される．

以下，特異複体 $C_* = S_*(X)$ で話をする．$\alpha \in Z^p(X, \mathbb{R}) := Z^q(S_*(X), \mathbb{R})$ と $\beta \in Z^q(X, \mathbb{R})$ をとる．特異 $(p+q)$-単体 $\sigma\colon \Delta^{p+q} \to X$ に対して

$$\alpha \cup \beta(\sigma) = \alpha(\sigma^{p+q}_{p|})\beta(\sigma^{p+q}_{|q})$$

と定義する．ここで $\sigma^{p+q}_{p|}$ と $\sigma^{p+q}_{|q}$ は，$\Delta^{p+q} = \langle e_0, e_1, \cdots, e_{p+q} \rangle$ (e_i は頂点) と書いたとき，$\sigma^{p+q}_{p|}$ は連続写像 σ を Δ^{p+q} の前半の $(p+1)$ 個の頂点の

つくる p-単体 $\langle e_0, e_1, \cdots, e_p\rangle$ に制限した特異 p-単体であり，$\sigma_{|q}^{p+q}$ は 後半の $(q+1)$ 個の頂点のつくる q-単体 $\langle e_p, e_{p+1}, \cdots, e_{p+q}\rangle$ に制限した特異 q-単体を表す．

$\alpha \in B^p(X)$ または $\beta \in B^q(X)$ のとき，$\alpha \cup \beta(\sigma) = 0$ であるので，この積 $\cup$ は $\alpha \in H^p(X, \mathbb{R})$ と $\beta \in H^q(X, \mathbb{R})$ に対して定義でき，$\alpha \cup \beta \in H^{p+q}(X, \mathbb{R})$ となる．これを，α と β のカップ積という．

このカップ積は第 3 章で扱われる微分形式の外積と (± の符号を無視すれば) 一致する．また，次節で述べるポアンカレ双対性を用いると，カップ積は対応するホモロジーのサイクルの交叉として考えることもできる．したがって，多様体 X のホモロジー群 $H_*(X, \mathbb{R})$ が X 中に登場するサイクルを記述したものだとすれば，コホモロジー環 $H^*(X, \mathbb{R})$ はそれらのサイクルの交叉の様子まで記述したものといえる．

2.9　基本ホモロジー類とポアンカレ双対性

ポアンカレ双対性は多様体を他の位相空間から区別する重要な特徴である．ここで本質的な役割を果たすのが多様体の向きである．

§2.4 で n 次元単体の向きを考えた．2 つの n 次元単体を 1 つの面を共有する形で貼り合せるとき，2 つの n 次元単体に同じように向きを入れておくと，共有面である $n-1$ 次元単体にはそれぞれの n 次元単体からは反対の向きが誘導されて，合計として相殺する．これによって 2 つの n 次元単体の和は全体として 1 つの向きが入り，境界作用素を施すと，内部の共有面は消えて，表面に現れた面だけの和が出てくる．このようにして単体分割された n 次元多様体 X を組み上げていくことができれば，多様体として 1 つの向きが指定されたことになる．このことが可能な多様体を**向きづけ可能**，そうでないとき**向きづけ不可能**という．たとえば，第 1 章で登場したメビウスの帯やクラインの壺などは向き付け不可能である．

向きの与えられた n-単体の総和はすでに境界を持たず，n 次元サイクルとなってホモロジー群 $H_n(X, \mathbb{R})$ の元を代表する．これをこの向き付けられた多様体 X の**基本ホモロジー類**といい $[X]$ などで表す．

たとえば，§2.6 の単体分割した円周に対しては，基本ホモロジー類は $[S^1] = \tau_1 + \tau_2 + \cdots + \tau_n$ であり，トーラスの基本ホモロジー類は §2.6 の記号で $[T^2] = \sigma_1 + \sigma_2$ である．これらの例でもそうであるが，一般に X を向き付けられた閉じた連結な n 次元多様体とすると，n 次元ホモロジー群は $[X]$ で生成される 1 次元実ベクトル空間になる．すなわち

$$H_n(X, \mathbb{R}) = \mathbb{R} \cdot [X].$$

一方，多様体が連結であることは 0 次元ホモロジー群が 1 次元実ベクトル空間になることと同値である．これはまた普遍係数定理から 0 次元コホモロジー群と同型である．そこで同型

$$H^0(X, \mathbb{R}) \cong H_n(X, \mathbb{R})$$

を得る．これは次の形に一般化される．

定理 (ポアンカレ双対定理). X を向き付けられた閉じた連結な n 次元多様体とする．このとき各 $j = 0, 1, \cdots, n$ に対し次の同型が成り立つ．

$$H^j(X, \mathbb{R}) \cong H_{n-j}(X, \mathbb{R})$$

j 次元コホモロジー類 α は j 次元ホモロジー類を代入すると実数値を返す線形関数だったので，これに n 次元の基本ホモロジー類 $[X]$ を代入すると $n-j$ 次元分のホモロジー類がのこる．上の同型は大まかに書けば，このようになる．

コホモロジー類のカップ積はポアンカレ双対性を介して，次のようにホモロジー類を代表するサイクルの交叉と解釈できる．$\alpha \in H^p(X, \mathbb{R})$ と $\beta \in H^q(X, \mathbb{R})$ がポアンカレ双対性でホモロジー類 $[z] \in H_{n-p}(X, \mathbb{R})$ と $[w] \in H_{n-q}(X, \mathbb{R})$ に対応するものとする．$n-p$ 次元サイクル z と $n-q$ 次元サイクル w は n 次元多様体の中で一般の位置においたとすると，$n-(p+q)$ 次元サイクルで交叉すると考えられる．この交叉で生じるサイクルが代表するホモロジー類がカップ積 $\alpha \cup \beta$ に対応する．

2.10　オイラー数とレフシェッツ数

この章の最後にホモロジー論の典型的な応用として不動点定理を述べておきたい．

もっとも簡単な不動点定理は閉区間からそれ自身への連続写像 $f\colon [0,1] \to [0, 1]$ は必ず不動点 ($f(x) = x$ となる x) をもつという定理である．これは $g(x) = x - f(x)$ とおいて連続写像 $g\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ を定義し，これに中間値の定理を適用して $g(x) = 0$ となる $x \in [0, 1]$ が存在することを言えば，この x が f の不動点ということになる．これは純粋にトポロジー的な存在定理で，閉区間でなくても，両端の閉じた曲線分であればいつでも成り立つが，その反面，不動点が具体的にどこに存在するのかは教えない．

重要な点は，不動点が存在するかどうかということが，空間 $[0, 1]$ のトポロジーに本質的にかかわりを持っているという点である．実際 $[0, 1]$ を円周 S^1 で置き換えたならば，不動点の存在は言えない．たとえば 10° 回転するという写像には不動点はないからである．

同じような現象に多様体上の接ベクトル場の特異点の存在がある．地球儀を眺めながら，現在の瞬間の地表の各点での風向と風力を 1 つの接ベクトルで表し，地球全体を連続的な接ベクトル場で覆ってみる．いろいろ試してみると，いくらやっても必ず風力 0 の地点 (ベクトル場の特異点) が現れてしまうことに気づく．そしてまたこれも地表という球面のトポロジーが本質的にかかわっている．実際，もし球面でなくてドーナツの表面だったとしたら，全体に風を吹かせることができることがすぐにわかる．

ベクトル場の特異点の問題はもっとも初期の位相不変量であるオイラー数と関連している．多様体 X のオイラー数 $\chi(X)$ は，第 1 章で説明したように，有限個の単体で分割したとき，q 次元単体の個数を ν_q とおくと，交代和

$$\chi(X) = \nu_0 - \nu_1 + \nu_2 - \nu_3 + \cdots + (-1)^n \nu_n$$

で定義される数である．すぐわかるように 2 次元球面のオイラー数は 2 であり，ドーナツの表面 (2 次元トーラス) のオイラー数は 0 である．あとの定理で見るようにオイラー数が 0 であることが，特異点のない接ベクトル場が存

在することと同値なのである.

オイラー数は (コ) ホモロジー群の次元の交代和にも等しい. すなわち $b_q = b_q(X) = \dim H^q(X, \mathbb{R})$ とおくとき

$$\chi(X) = b_0 - b_1 + b_2 - b_3 + \cdots + (-1)^n b_n$$

である. こうすると, X の単体分割を使わないで $\chi(X)$ が定義できる. コホモロジー群が位相不変量なので $b_q(X)$ も位相不変量であって, $b_q(X)$ を X の q **次元ベッチ数**とよぶ.

連続写像 $f\colon X \to X$ を考えよう. f はコホモロジー群の準同型写像 $f^q\colon H^q(X, \mathbb{R}) \to H^q(X, \mathbb{R})$ を誘導する. これは線形写像であるので, f^q は正方行列で表すことができる. この行列の対角成分の和 (トレース) を $\mathrm{tr}(f^q)$ と書く. $\mathrm{tr}(f^q)$ は固有値の和であって基底のとり方に依存しない. そこで

$$\lambda(f) = \mathrm{tr}(f^0) - \mathrm{tr}(f^1) + \cdots + (-1)^n \mathrm{tr}(f^n)$$

とおき, これを連続写像の**レフシェッツ数**とよぶ. f が恒等写像 $\mathrm{id}_X\colon X \to X$ の場合には

$$\mathrm{tr}(f^q) = \mathrm{tr}(\mathrm{id}\colon H^q(X) \to H^q(X)) = \dim H^q(X) = b_q(X)$$

であるから $\lambda(\mathrm{id}_X) = \chi(X)$ となり, この意味でレフシェッツ数はオイラー数の一般化になっている.

さて不動点定理の典型としてレフシェッツの定理を述べるために, 連続写像 $f\colon X \to X$ の不動点指数 $I(f)$ を定義する必要がある. これを一般の連続写像に関して正確に定義するためには空間対の (コ) ホモロジーを利用しなければならない. しかし基本的な考え方は自然なものなので, それを説明することにする.

X は曲面とし, $f\colon X \to X$ の不動点の全体は有限個の点 $P_1, P_2, \cdots, P_s$ であるとする. f はあまり奇抜な連続写像でなく, 滑らかな写像であるとする. すると, 各不動点 P_j のごく近くに P_j を中心とする十分半径の小さい円周 C_j を書くと, C_j 上には不動点はない. またこれは 1 点 P_j のごく近傍の話なので, ユークリッド平面にのっているものとしよう. ここで円周 C_j 上を

1 周する動点 x を考える．x が円周を (反時計回りに) 回ると，ベクトル $x - f(x)$ は連続的に変化し，x が元の点に帰るとこのベクトルも元のベクトルに戻る．この間に $x - f(x)$ は 0 になることはないから，このベクトルの向く方向は何回転かしたのちに元の方向に戻る．回転数に反時計回りなら正，時計回りなら負の符号を付けて考えたものを m_j としよう．この回転数をすべての不動点について求め，その総和を $I(f)$ とする．

$$I(f) = m_1 + m_2 + \cdots + m_s$$

一般の次元ではこの回転数に相当する部分は写像 $\dfrac{x - f(x)}{|x - f(x)|} : S^{n-1} \to S^{n-1}$ がホモロジー群に誘導する準同型写像によって，S^{n-1} の基本ホモロジー類が何倍されるか，という整数で与えられることになる．一般の連続写像を扱うためには位相空間の組の (コ) ホモロジー群 (相対 (コ) ホモロジーという) $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ を考え，この生成元を使えばよい．この基本 (コ) ホモロジー類を正確に調べると次の定理が得られる．

定理 (レフシェッツの不動点公式)．　X を閉多様体とし，$f\colon X \to X$ を連続写像とする．このとき $\lambda(f) = I(f)$ が成立する．とくに $\lambda(f) \neq 0$ ならば必ず不動点が存在する．

X を滑らかな閉多様体とする．X 上に連続的な接ベクトル場 V があると，X の各点 $x \in X$ をこの点を始点とするベクトル $V(x)$ の方向に少しだけ移動する写像 f を考えることによって，不動点指数 $I(f)$ を考えることができる．これをベクトル場 V の指数と言い $I(V)$ と書く．上の定理によれば $I(V) = \lambda(f)$ である．他方この f は X の恒等写像 id_X を連続的に変形したもので，これにホモトピックだから $\lambda(f) = \lambda(\mathrm{id}_X) = \chi(X)$ となる．したがって次の定理が成立する．

定理 (ポアンカレ-ホップ)．　$I(V) = \chi(X)$．とくにオイラー数が 0 でない多様体上には特異点のない接ベクトル場は存在しない．

実はオイラー数が 0 であると，特異点のない連続接ベクトル場を実際に構成することができるので，オイラー数が 0 であることが特異点のない連続ベクト

ル場が存在するための必要十分条件を与えている．オイラー数はこのように連続ベクトル場を構成するための障害の程度を表していると思うことができる．地球の表面は 2 次元球面であり，オイラー数は 2 であったから，この定理によって，風力 0 の地点が存在することが，トポロジー的に示されたことになる．

第 3 章

可微分多様体とド・ラームコホモロジー

杉山健一

3.1 可微分多様体

17 世紀以降の数学は微積分のおかげで大変な進歩を遂げた．幾何学においても，微積分を用いて曲線や曲面を曲率等を用いて研究する微分幾何学というものがあった．幾何学の研究に革命的な進歩を与えた多様体の考え方と，微積分を融合させることは，自然な考え方である．そのためには，位相多様体の定義を少し変更して，可微分多様体という概念を導入する必要がある．

n 次元位相多様体は，$\mathbb{R}^n$ の開集合をいくつか貼り合わせて作ったものであった．この貼り合わせの意味を，少し詳しく分析してみよう．$\mathbb{R}^n$ の 2 つの開集合を用意し，それを U, V と書くことにする．U の座標系を $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，V の座標系を $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ とする．U と V を貼り合わせる糊代 $U \cap V$ 上には 2 種類の座標系 (x 座標系と y 座標系) がある．この 2 種類の座標系は同じではないが，ある関数 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n; \psi_1, \cdots, \psi_n$ により，

$$y_i = \varphi_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$
$$x_j = \psi_j(y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

と書ける．位相多様体においては，各 φ_i, ψ_j は連続関数であればよかった．この条件をすこし厳しくし，各 φ_i, ψ_j は無限回微分可能な関数でなければな

らない，という条件を課すことにする．このとき得られる位相多様体を n 次元 (C^∞ 級) **可微分多様体**とよぶ．また，座標系 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ や $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ を**局所座標**といい，U, V などを**座標近傍**という．

φ_i, ψ_j が無限回微分可能な関数であれば，以下のように，多様体上で微積分を考えることができる．しかし，通常の微積分より若干制約がある．

3.2 曲線上での微分

n 変数関数や n 重積分は $\mathbb{R}^n$ 上で定義したが，$\mathbb{R}^n$ は n 次元可微分多様体の特殊なものである．多変数の微積分 (偏微分と重積分) は，添え字が多くてごちゃごちゃするから，まず，1 変数の微積分で説明する．それは，1 次元可微分多様体 (曲線) 上での微積分である．

上の記号を用い U, V の座標を各々 x, y とし，$U \cap V$ 上で $y = \varphi(x)$, $x = \psi(y)$ であるとする．$U \cap V$ 上の関数 f は，$U \cap V$ 上の点 P に対し実数 $f(P)$ を対応させる写像である．しかし，導関数 $f'(P)$ はうまく定義できない．なぜならば，f を x 座標により $f(x)$ と表した場合の導関数 $f'(x)$ と，y 座標により $f(y)$ と表した場合の導関数 $f'(y)$ は一般的には一致しないからである．P の x, y 座標がそれぞれ x, y のとき，$f(P) = f(x) = f(\psi(y))$ であるから，

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

である．形式的に両辺に dx を掛けると，

$$df = \frac{df}{dx}\,dx = \frac{df}{dy}\,dy \tag{1}$$

となり，これは x 座標でも y 座標でも同じ形になる．(1) は多様体において導関数の代わりになるものである．df は解析学では f の全微分とよぶが，多様体では，関数 f の**外微分**とよぶ．

(1) で $a(x) = \dfrac{df}{dx}$, $b(y) = \dfrac{df}{dy}$ とし，df を ω を書き直すと，

$$\omega = a(x)\,dx = b(y)\,dy \tag{2}$$

$$b(y) = a(\psi(y))\frac{dx}{dy}, \quad a(x) = b(\varphi(x))\frac{dy}{dx}$$

となり，これは x 座標と y 座標に関して対称的な形である．一般に (2) の形の ω を **1 次微分形式** (略して **1-形式**) とよぶ．関数の外微分は関数ではなく 1-形式になるのである．

次は積分を考えよう．ただし，不定積分ではなく，定積分に対応するものである．

$U \cap V$ 上の閉区間 I において，微分形式 $\omega = a(x)dx$ の定積分は次のように考えることができる．x 座標で $I = [x_0, x_1]$ であるとすれば，y 座標で $I = [\varphi(x_0), \varphi(x_1)]$ であり，

$$\int_I \omega = \int_{x_0}^{x_1} a\,dx = \int_{\varphi(x_0)}^{\varphi(x_1)} b\,dy \tag{3}$$

である．この積分は x 座標で計算しても y 座標でも計算しても同じ値になり，座標系の選び方に依存しない．ただし，$\varphi(x_0) < \varphi(x_1)$ とは限らないことに注意しておこう．

3.3　曲面上の微分形式

以上の話を 2 次元可微分多様体 (曲面) S 上に一般化するには，少し工夫を要する．U の座標を (x, y), V の座標を (s, t) と書くことにする．

$$dx = \frac{\partial x}{\partial s}ds + \frac{\partial x}{\partial t}dt$$
$$dy = \frac{\partial y}{\partial s}ds + \frac{\partial y}{\partial t}dt$$

という関係式を使えば，2 変数関数 $f(x, y)$ の全微分

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

は，(x, y) 座標でも (s, t) 座標でも同じ形に書ける．

$$\omega = a(x, y)\,dx + b(x, y)\,dy$$

を 1 次微分形式 (略して **1-形式**) という．これは曲面 S 上で積分することはできないが，S 内の曲線 C 上では線積分することができる．その定義は，通常の線積分とまったく同じである．つまり，曲線 C がパラメータ u により

$$x = x(u), \quad y = y(u) \qquad (u_0 \leqq u \leqq u_1)$$

で定義されていれば，

$$\int_C \omega = \int_{u_0}^{u_1} \left(a(x(u), y(u)) \frac{dx}{du} + b(x(u), y(u)) \frac{dy}{du} \right) du$$

である．

D が $U \cap V$ の領域のとき，積分 $\displaystyle\int_D f(x, y)\, dx\, dy$ を (s, t) 座標で考えるとどうなるであろうか．積分の変数変換の公式によれば，

$$dx\, dy = \left| \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial s} \right| ds\, dt$$

である．しかし，絶対値のついた関数は微分できないし，1 変数の場合の公式 (3) とつじつまが合わない．

この不都合は負の面積を導入することによって解決できる．つまり，平面上の図形を裏返したら面積は負になると約束し，重積分の定義を変更する．すると，積分の変数変換の公式は

$$dx\, dy = \left(\frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial s} \right) ds\, dt$$

となる．ここで，$s = y, t = x$ とおくと，この等式は，$dx\, dy = -dy\, dx$ となる．これでも別に不都合はないのだが，普通の重積分と混乱しないように，負の面積を許して定義した積分では，$\displaystyle\int_D a\, dx\, dy$ と書くかわりに $\displaystyle\int_D a\, dx \wedge dy$ と書くように約束する．この記号のもとでは

$$dx \wedge dy = -dy \wedge dx$$

である．(y, x)-平面は (x, y)-平面を裏返したものだから，$dy \wedge dx = -dx \wedge dy$ であることは納得できるであろう．

また，ここで $x = y$ とおくと $dx \wedge dx = -dx \wedge dx$ だから，

$$dx \wedge dx = 0$$

であることがわかる．

一般に $\omega = a\,dx \wedge dy$ を 2 次微分形式 (**2-形式**) という．(s, t) 座標との変換は，公式

$$dx \wedge dy = \left(\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial s}\right) ds \wedge dt$$

を用いて行う．そうすると，ω は座標系の選び方によらない対称的な形になる．上の積分方法で，2-形式 ω について S 上の領域 D 上での積分の値 $\int_D \omega$ が座標系に依存せずに定まる．

3.4　向きづけ可能性

ところで，曲面の中には，メビウスの帯やクラインの壺のように表と裏を区別することのできない曲面があった．このような曲面上に局所座標 (x, y) を設定しても，曲面をぐるっと 1 周回ってくると表裏が反対になって，(x, y)-座標が (y, x)-座標になってしまう．表裏が定義できないから，負の面積というものも定義できず，上のような重積分がうまく定義できない．また，(x, y)-座標と (y, x)-座標を区別できないから，微分形式も $dx \wedge dy = dy \wedge dx = -dx \wedge dy$ という等式が成立して，$dx \wedge dy = 0$ となる．つまり，0 でない 2-形式は存在しない．

以上のように，表裏が区別できない曲面上では，今まで説明したような微積分の理論は構築できない．

3 次元以上の多様体でも，向きづけ不可能な多様体には微積分の理論がうまく構築できない．そこで，今後扱う可微分多様体は，すべて向きづけ可能であると約束する．

3.5 ストークスの定理

電磁気学では，線積分や面積分に関して，ガウスの定理，グリーンの定理，ストークスの定理をよく使う．数学的にはこの 3 つは同一の定理である．電磁気学では，この定理を接線ベクトルや法線ベクトルを用いて記述するが，それを成分で表したとき，本質的には次の形の定理に帰着される．

定理． (x, y) 平面内に，(単純閉) 曲線 C で囲まれた (単連結な) 領域 D があるとき，次の公式が成り立つ．

$$\int_C (a\,dx + b\,dy) = \int_D \left(-\frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial b}{\partial x} \right) dx \wedge dy \tag{4}$$

ただし，線積分 $\displaystyle\int_C$ は，C 上を反時計回りの方向に積分しないといけない．

この公式を美しく書き直してみよう．まず，D の境界 C を $C = \partial D$ と書くことにする．実は，この ∂ は，ホモロジーの定義において，2-鎖体 D を単体分割 (三角形分割) して，その境界として 1-鎖体 ∂D を求めることと同じである．

$\omega = a\,dx + b\,dy$ とおくと，これは 1-形式である．ここで，

$$\begin{aligned} d\omega &= \left(\frac{\partial a}{\partial x} dx \wedge dx + \frac{\partial a}{\partial y} dy \wedge dx \right) + \left(\frac{\partial b}{\partial x} dx \wedge dy + \frac{\partial b}{\partial y} dy \wedge dy \right) \\ &= \frac{\partial a}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial b}{\partial x} dx \wedge dy = \left(-\frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial b}{\partial x} dx \right) dx \wedge dy \end{aligned}$$

として $d\omega$ を定める．これを ω の**外微分**という．$d\omega$ は 2-形式で，(x, y) 座標のかわりに別の (s, t) 座標を使って計算しても，得られる 2-形式は同じものになる．つまり，外微分 $d\omega$ は座標に依存しない．

これらの記号のもとに (4) は，

$$\int_{\partial D} \omega = \int_D d\omega \tag{5}$$

と表せる．(5) は座標 (x, y) が明示的に表に現れない形になっているので，D が 2 次元可微分多様体上の閉曲線 C で囲まれた領域の場合でも，そのまま成り立つ．さらに，(5) は n 次元可微分多様体上に，そのまま拡張できるのである．

3.6　3 次元可微分多様体上の微分形式

3 次元可微分多様体において座標近傍 U 上の局所座標を (x, y, z) とする．0 次微分形式は関数のことであると約束すると，微分形式には

0-形式　$\omega_0 = f(x,y,z)$

1-形式　$\omega_1 = f(x,y,z)dx + g(x,y,z)dy + h(x,y,z)dz$

2-形式　$\omega_2 = f(x,y,z)dy \wedge dz + g(x,y,z)dz \wedge dx + h(x,y,z)dx \wedge dy$

3-形式　$\omega_3 = f(x,y,z)dx \wedge dy \wedge dz$

の 4 種類がある．また，

$$dz \wedge dx = -dx \wedge dz$$
$$dx \wedge dy \wedge dz = -dy \wedge dx \wedge dz = dy \wedge dz \wedge dx$$
$$dx \wedge dy \wedge dx = 0$$

等の規則がある．$\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3$ の外微分は，

$$d\omega_0 = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$
$$d\omega_1 = \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx \wedge dy$$
$$d\omega_2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz$$
$$d\omega_3 = 0$$

である．これらは，局所座標の選び方に依存しない．ここで，$d(d\omega_0) = 0$ であることに注意しよう．実は外微分は 2 回行うと必ず 0 になるのである．

1-形式 ω_1 は線積分することができ，2-形式 ω_2 は面積分することができ，3-形式 ω_3 は多様体の (3 次元の) 領域上で積分することができる．

多様体内に曲面 S で囲まれた領域 D があれば，$S = \partial D$ にうまく向きを決めるとストークスの定理

$$\int_{\partial D} \omega_2 = \int_D d\omega_2$$

が成り立つ．また，多様体内に曲面があるとき，その上の曲線 C で囲まれた

領域 D 上でも，

$$\int_{\partial D} \omega_1 = \int_D d\omega_1$$

が成り立つ．

ところで，$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ のとき，$\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$ と $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ は同じものと考えられる．ここで右辺の $\times$ はベクトル積であり，$\wedge$ は外積とか交代積ともよばれる．ベクトル積 $\times$ は $\mathbb{R}^3$ 以外では定義することができない特殊なベクトルの演算であったが，交代積 $\wedge$ は任意のベクトル空間で定義することができる．しかし，このことは，本稿の話には必要でないので，割愛する．

3.7 n 次元可微分多様体上の微分形式

n 次元可微分多様体 M において局所座標を $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ とする．添え字がごちゃごちゃして見づらいかもしれないが，$1 \leqq r \leqq n$ のとき．

$$\omega_r = \sum_{1 \leqq i_1 < \cdots < i_r \leqq n} f_{i_1 \cdots i_r}(x_1, \cdots, x_n) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_r}$$

(ただし，$f_{i_1 \cdots i_r}$ は無限回微分可能な関数) を r-形式という．$r = 0$ のとき，つまり 0-形式は単に関数のこととする．

r-形式は，可微分多様体 M の r 次元の部分多様体上で積分することができる．

$$df(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f(x_1, \cdots, x_n)}{\partial x_k} dx_k$$

であるから，r-形式 ω_r の外微分 $d\omega_r$ は

$$\begin{aligned} d\omega_r &= \sum_{1 \leqq i_1 < \cdots < i_r \leqq n} df_{i_1 \cdots i_r}(x_1, \cdots, x_n) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_r} \\ &= \sum_{i_1 < \cdots < i_r} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_{i_1 \cdots i_r}(x_1, \cdots, x_n)}{\partial x_k} dx_k \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_r} \end{aligned}$$

によって定義する．$d(df) = 0$ だから $d(d\omega_r) = 0$ が成り立つ．

M の $r+1$ 次元の部分多様体 N 上に，閉じた r 次元多様体 B で囲まれた

領域 D があるとき，$B = \partial D$ として，ストークスの定理

$$\int_{\partial D} \omega_r = \int_D d\omega_r$$

が成り立つ．ここで，D の境界 ∂D を取る操作は，ホモロジーの境界作用素 ∂ と同じであり，積分における B の向きは，ホモロジーの境界作用素によって定まる向きと一致するように選ぶ．

変数変換の公式もちょっと複雑だが書いておこう．$(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ を別の局所座標とする．r 個の添え字 $1 \leqq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leqq n$ と $1 \leqq j_1 < j_2 < \cdots < j_r \leqq n$ を選び，$\dfrac{\partial y_{i_k}}{\partial x_{j_l}}$ を (k, l)-成分とする r 次正方行列の行列式を $\dfrac{\partial(y_{i_1}, y_{i_2}, \cdots, y_{i_r})}{\partial(x_{j_1}, x_{j_2}, \cdots, x_{j_r})}$ と書き，ヤコビアンとよぶ．この記号のもとに変換公式は

$$\begin{aligned} &dy_{i_1} \wedge dy_{i_2} \wedge \cdots \wedge dy_{i_r} \\ &\qquad = \sum_{1 \leqq j_1 < \cdots < j_r \leqq n} \frac{\partial(y_{i_1}, y_{i_2}, \cdots, y_{i_r})}{\partial(x_{j_1}, x_{j_2}, \cdots, x_{j_r})} dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge \cdots \wedge dx_{j_r} \end{aligned}$$

である．

3.8　多様体上の不定積分

ここまで説明した微分形式の積分は，定積分であって，積分の結果は実数になる．1 変数関数 $f(x)$ にはその不定積分 (原始関数) $F(x)$ を考えることができた．これは，微分方程式 $y' = f(x)$ の解 $y = F(x)$ であると解釈してもよい．$\mathbb{R}$ を 1 次元可微分多様体と考えて，座標系 x に依存しない形に書き直してみよう．

$F'(x) = f(x)$ の両辺に dx をつけて，$F'(x)dx = f(x)dx$ と変形する．ここで，左辺の未知関数 $F(x)$ を 0-形式 $\omega = F(x)$ とおき，右辺を 1-形式 $\omega_0 = f(x)dx$ とおく．ω_0 は与えられた 1-形式である．すると，$d\omega = F'(x)dx$ だから，微分方程式 $y' = f(x)$ は，

$$d\omega = \omega_0 \quad (\omega \text{ は未知の 0-形式，} \omega_0 \text{ は与えられた 1-形式})$$

という方程式と同値になる．この微分形式の方程式は座標系 x に依存しない形をしているので，多様体上の方程式とみなせる．

したがって，一般の可微分多様体で不定積分に相当するものは，与えられた r-形式 ω_0 に対し，

$$d\omega = \omega_0$$

を満たす $(r-1)$-形式 ω を求めることである．

さて，手始めに 円周 $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ 上の不定積分を調べてみる．S^1 は 1 次元の可微分多様体である．円周 S^1 上の点 (x, y) は $x = \cos\theta, y = \sin\theta$ と表せるから θ を局所座標として用いるのが便利である．まず，$\omega_0 = d\theta$ として，ω に関する微分方程式

$$d\omega = \omega_0 (= d\theta) \tag{6}$$

を解いてみよう．$\omega = F(\theta)$ とすれば，この方程式は $F'(\theta) = 1$ と同値であるから，$F(\theta) = \theta + C$ (C は積分定数) となる．しかし，S^1 上では $(\cos(\theta + 2\pi), \sin(\theta + 2\pi)) = (\cos\theta, \sin\theta)$ であるから，$F(\theta)$ が S^1 上の関数であるためには $F(\theta + 2\pi) = F(\theta)$ を満たさなければならない．$F(\theta) = \theta + C$ はこの条件を満足しないから，微分方程式 (6) は解を持たないことが結論される．

$\mathbb{R}$ 上では (6) は $\omega = (\theta + C)d\theta$ という解を持つが S^1 上では解がない，という事実は，$\mathbb{R}$ と S^1 が多様体として同相でないことの証明にもなる．そして，このアイデアがド・ラームコホモロジーの考え方のもとになっている．

3.9 ド・ラームコホモロジー

M を n 次元可微分多様体とする．M 上の微分方程式

$$d\omega = \omega_0 \quad (\omega \text{ は未知の } (r-1)\text{-形式，} \omega_0 \text{ は与えられた } r\text{-形式})$$

は ω_0 の与え方によって解を持ったり持たなかったりする．

$C^r(M)$ を M 上の r-形式全体の集合とし，$B^r(M)$ をその中で上の微分方

程式が解を持つような ω_0 全体の部分集合とする．言い換えれば,

$$B^r(M) = \left\{ d\omega \;\middle|\; \omega \in C^{r-1}(M) \right\}$$

である．ただし，$B^0(M) = \{0\}$ と約束しておく．

ところで，2 つの r-形式の和が定義でき，$C^r(M)$ や $B^r(M)$ は和について閉じているから加法群になっている．また，定数倍についても閉じているから，$C^r(M)$ や $B^r(M)$ は (実) ベクトル空間になる．

$$Z^r(M) = \left\{ \omega \in C^r(M) \;\middle|\; d\omega = 0 \right\}$$

という集合もベクトル空間になっていて,

$$B^r(M) \subset Z^r(M) \subset C^r(M)$$

という包含関係がある．なぜならば，任意の $d\omega \in B^r(M)$ に対して，$d(d\omega) = 0$ だから，$d\omega \in Z^r(M)$ となるからである．

r **次ド・ラームコホモロジー群** $H^r(M, \mathbb{R})$ は

$$H^r(M, \mathbb{R}) = Z^r(M)/B^r(M)$$

として定義される．コホモロジーにはいろいろな種類があるので，$H^r(M, \mathbb{R})$ を $H^r_{DR}(M)$ と書いて区別することもある．また，$\mathbb{R}$ を省略して $H^r(M)$ とも書く．

$Z^r(M)$ や $B^r(M)$ はふつう無限次元ベクトル空間であるのだが，M がコンパクトならばド・ラームコホモロジー $H^r(M)$ は有限次元ベクトル空間になることが知られている．ところで，$C^r(M)$ を定義するとき，微分形式の係数に現れる関数はすべて無限回微分可能であると約束した．しかし，$H^r(M)$ を定義するとき，係数の関数は 2 回しか微分しないから，係数の関数が 2 回微分可能であるような微分形式全体を用いてド・ラームコホモロジーを定義することもできる．もちろん対応する $Z^r(M)$, $B^r(M)$ は両方とも大きくなるが，$H^r(M)$ は割り算によってそれが相殺され，もともとのド・ラームコホモロジー群と一致してしまうのである．

$M = \mathbb{R}$ と $M = S^1$ のド・ラームコホモロジー群 $H^1(M, \mathbb{R})$ を計算してみ

よう．

まず，M は 1 次元多様体だから，任意の 1-形式は外微分すると 0 になる．よって，$Z^1(M) = C^1(M)$ である．

$M = \mathbb{R}$ の場合，任意の微分可能な関数には原始関数が存在した．このことは，任意の 1-形式 ω はある関数 (0-形式) f により $\omega = df$ と表せることを意味する．よって，$B^1(M) = C^1(M)$ である．これより

$$H^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = H^1(M, \mathbb{R}) = 0$$

が得られる．

他方，$M = S^1$ の場合，微分方程式 (6) は解を持たなかったから，局所的な微分形式 $d\theta$ は，S^1 全体で定義された関数 f により $d\theta = df$ として表すことができない．よって，$B^1(S^1) \neq C^1(S^1)$ であり，

$$H^1(S^1, \mathbb{R}) \neq 0$$

がわかる．フーリエ級数の理論によれば，S^1 上の微分可能な関数 $f(\theta)$ は $f(\theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$ という形に表せる．$d \sin n\theta = n \cos n\theta \, d\theta$, $d \cos n\theta = -n \sin n\theta \, d\theta$ だから，S^1 上で不定積分が存在しない部分は，本質的には定数関数 a_0 の部分だけである．このことから，$H^1(S^1, \mathbb{R}) = \mathbb{R}$ が証明される．

3.10 実数係数ホモロジー群

上で定義したド・ラームコホモロジーは第 1, 2 章で定義したホモロジー群と実質的に同じになる．ホモロジー群は多様体という図形の位相的なつながり具合を記述する量であったが，それが微分形式という解析的な量と関係するということは，画期的な発見であった．このことはド・ラームの定理とよばれるが，それを正確に述べるためには，第 1, 2 章で定義したホモロジー群 $H_r(M, \mathbb{Z})$ の係数 $\mathbb{Z}$ を実数全体の集合 $\mathbb{R}$ に変更する必要がある．

ホモロジー群を定義するには，単体的複体 C_r や特異複体 $S_r(M)$ を用いた．C_r は単体分割に現れる r 次元単体全体を $\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_l$ とするとき

$$C_r = \mathbb{Z}\,\tau_1 \oplus \mathbb{Z}\,\tau_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\,\tau_l$$

として定義された．S_r はすべての r 次元特異単体を基底とする $\mathbb{Z}$ 加群であった．以下，$\mathbb{Z}$ 加群 C_r や $S_r(M)$ を $C_r(M, \mathbb{Z})$ と書く．

これらの複体には境界作用素 $\partial_r\colon C_r(M, \mathbb{Z}) \to C_{r-1}(M, \mathbb{Z})$ が定義されていた．そして，

$$Z_r(M, \mathbb{Z}) = \left\{\gamma \in C_r(M, \mathbb{Z}) \,\middle|\, \partial_r(\gamma) = 0\right\}$$
$$B_r(M, \mathbb{Z}) = \left\{\partial_{r+1}\gamma \in C_r(M, \mathbb{Z}) \,\middle|\, \gamma \in C_{r+1}(M, \mathbb{Z})\right\}$$

とおくとき，ホモロジー群は

$$H_r(M, \mathbb{Z}) = Z_r(M, \mathbb{Z})/B_r(M, \mathbb{Z})$$

として定義された．複体の選び方により $Z_r(M, \mathbb{Z})$ や $B_r(M, \mathbb{Z})$ はいろいろ変化し一意的でないが，割り算を行うことによりその違いが相殺されホモロジー群 $H_r(M, \mathbb{Z})$ はどんな複体を利用して定義しても，必ず同じものが得られた．

この定義において，$\mathbb{Z}$ は単体や鎖体の係数を表していた．上の複体の定義に現れる $\mathbb{Z}$ を $\mathbb{R}$ と書き直すと，実ベクトル空間 $C_r(M, \mathbb{R})$ が得られる．これをもとに，

$$Z_r(M, \mathbb{R}) = \left\{\gamma \in C_r(M, \mathbb{R}) \,\middle|\, \partial_r(\gamma) = 0\right\}$$
$$B_r(M, \mathbb{R}) = \left\{\partial_{r+1}\gamma \in C_r(M, \mathbb{R}) \,\middle|\, \gamma \in C_{r+1}(M, \mathbb{R})\right\}$$
$$H_r(M, \mathbb{R}) = Z_r(M, \mathbb{R})/B_r(M, \mathbb{R})$$

として，実数係数ホモロジー群 $H_r(M, \mathbb{R})$ を定義する．すると，これは実ベクトル空間になる．

$\mathbb{Z}$ を $\mathbb{R}$ におきかえたのと同様に，$\mathbb{Z}$ を複素数全体の集合 $\mathbb{C}$ や，もっと一般に体や環 K におきかえて，K-係数ホモロジー群 $H_r(M, K)$ も定義できる．たとえば K が標数 0 の体ならば $H_r(M, \mathbb{Z})$ をもとに，次の公式により計算できる．

$$H_r(M, K) = H_r(M, \mathbb{Z}) \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} K$$

テンソル積 $\underset{\mathbb{Z}}{\otimes}$ の定義は複雑なので第 4 章にまわすが，実用上，次の公式を知っ

ていれば十分である．

K が $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ 等の体であるとき，

$$\mathbb{Z} \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} K = K$$
$$\mathbb{Z}^m \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} K = K^m$$
$$(\mathbb{Z}\,/m\,\mathbb{Z}) \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} K = 0$$
$$(A_1 \oplus \cdots \oplus A_m) \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} K = (A_1 \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} K) \oplus (A_2 \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} K) \oplus \cdots \oplus (A_m \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} K)$$

たとえば，$H_r(M, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^m \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ ならば，$H_r(M, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^m$ となる．つまり，$H_r(M, \mathbb{Z})$ よりも $H_r(M, \mathbb{R})$ のほうが単純なものになるのである．

3.11 ホモロジー上での微分形式の積分

n 次元可微分多様体内の r-単体 σ 上では，r-形式 ω の積分 $\int_\sigma \omega$ が定義されていた．鎖体 $\delta = a_1\sigma_1 + \cdots + a_m\sigma_m$ に対しても

$$\int_\delta \omega = a_1 \int_{\sigma_1} \omega + \cdots + a_m \int_{\sigma_m} \omega$$

によって積分を定義できる．

今，$\delta \in B_r(M, \mathbb{R})$ であれば，ある $\gamma \in C_{r+1}(M, \mathbb{R})$ により $\delta = \partial\gamma$ と書ける．このとき，ストークスの定理により $\int_\delta \omega = \int_{\partial\gamma} \omega = \int_\gamma d\omega$ となる．特に，$\omega \in Z^r(M, \mathbb{R})$ ならば $d\omega = 0$ だから，$\int_\delta \omega = 0$ となる．したがって，δ_1, $\delta_2 \in Z_r(M, \mathbb{R})$ で $\delta_1 - \delta_2 \in B_r(M, \mathbb{R})$, $\omega \in Z^r(M, \mathbb{R})$ であれば，$\int_{\delta_1} \omega = \int_{\delta_2} \omega$ となるから，ホモロジー群の元 $[\delta_1] = [\delta_2] \in H_r(M, \mathbb{R})$ に対しても積分 $\int_{[\delta_1]} \omega = \int_{\delta_1} \omega$ が矛盾なく定義できる．δ のホモロジー類 $[\delta]$ を単に δ と書くことにすると，$\omega \in Z^r(M, \mathbb{R})$, $\delta \in H_r(M, \mathbb{R})$ であれは積分 $\int_\delta \omega$ が定義

できるのである．

今度は，ド・ラームコホモロジーの元をホモロジーの上で積分することを考えよう．

$\omega_1, \omega_2 \in Z^r(M, \mathbb{R})$ が同じド・ラームコホモロジーの元を定めると仮定する．つまり $\omega_1 - \omega_2 \in B^r(M, \mathbb{R})$ だから，ある $\omega \in C^{r-1}(M, \mathbb{R})$ により $\omega_1 - \omega_2 = d\omega$ と書ける．また，$\delta \in H_r(M, \mathbb{R})$ は $\delta \in Z_r(M, \mathbb{R})$ のホモロジー類であるから $\partial\delta = 0$ であると考えてよい．すると，

$$\int_\delta \omega_1 - \int_\delta \omega_2 = \int_\delta d\omega = \int_{\partial\delta} \omega = \int_0 \omega = 0$$

となる．よって，$\omega_1 \in H^r(M, \mathbb{R})$ と $\delta \in H_r(M, \mathbb{R})$ に対し積分 $\int_\delta \omega_1$ が矛盾なく定義できる．

3.12　ド・ラームの定理

$\omega \in H^r(M, \mathbb{R})$ と $\gamma \in H_r(M, \mathbb{R})$ に対し積分 $\int_\gamma \omega$ が定義できたが，M がコンパクトのとき，この積分は次の性質を持つ．

(i) すべての $\omega \in H^r(M, \mathbb{R})$ に対し $\int_\gamma \omega = 0$ ならば $\gamma = 0$ である．

(ii) すべての $\gamma \in H_r(M, \mathbb{R})$ に対し $\int_\gamma \omega = 0$ ならば $\omega = 0$ である．

このことは，$(\omega, \gamma) = \int_\gamma \omega$ によって定まる双線形写像 $H^r(M, \mathbb{R}) \times H_r(M, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ が非退化であることを意味する．線形代数の結果によれば，$H^r(M, \mathbb{R})$ と $H_r(M, \mathbb{R})$ は同じ次元のベクトル空間であることがわかる．つまり，

$$H^r(M, \mathbb{R}) \cong H_r(M, \mathbb{R})$$

である．(正確にいうと，$H^r(M, \mathbb{R})$ と $H_r(M, \mathbb{R})$ は双対ベクトル空間であって，上の同型写像は基底の選び方に依存するので標準的なものではない.)

したがって，ド・ラームコホモロジー群は，第 2 章で定義されたコホモロ

ジー群と完全に一致する．

$H_r(M, \mathbb{R})$ は多様体の形から比較的簡単に計算できるものである．しかし，ド・ラームコホモロジー $H^r(M, \mathbb{R})$ を直接微積分を用いて計算することは容易でない．ド・ラームの定理は，多様体上の微分形式の定量的性質が多様体の位相的性質で決定されることを表す深遠な公式なのである．

ところで，ホモロジー群と異なり，コホモロジー群は以下のような (非可換) 環の構造を持つ．形式的に，$r > n$ のとき $H^r(M, \mathbb{R}) = \{0\}$ とおき，

$$H^*(M, \mathbb{R}) = \bigoplus_{r=0}^{\infty} H^r(M, \mathbb{R})$$

とおく．たとえば，1-形式 $\omega_1 = a\,dx$ と 2-形式 $\omega_2 = b\,dy \wedge dz$ に対し，

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = (ab)\,dx \wedge dy \wedge dz$$

として $\wedge$ を定義する．一般の微分形式の場合も同様であり，p-形式と q-形式の $\wedge$ は $(p+q)$-形式になる．ただし，

$$(a\,dx) \wedge (b\,dy) = (ab)\,dx \wedge dy = -(ab)\,dy \wedge dx = -(b\,dy) \wedge (a\,dx)$$

だから交換法則は成り立たない．

この演算 $\wedge$ は $H^*(M, \mathbb{R})$ 上の演算と考えることができる．すると，$H^*(M, \mathbb{R})$ は $+$ を和，$\wedge$ を積として (非可換) 環になる．

3.13　いくつかのド・ラームコホモロジーの例

M が n 次元コンパクト可微分多様体 (連結で向きづけられているとする) ならば，$H_0(M, \mathbb{R}) = \mathbb{R}$, $H_n(M, \mathbb{R}) = \mathbb{R}$ だから，ド・ラームの定理により

$$H^0(M, \mathbb{R}) = \mathbb{R}, \quad H^n(M, \mathbb{R}) = \mathbb{R}$$

である．これを微分形式を通して解釈しておこう．

$B^0(M, \mathbb{R}) = \{0\}$ だから，

$$H^0(M, \mathbb{R}) = Z^0(M, \mathbb{R}) = \left\{f \;\middle|\; f \text{ は } M \text{ 上の関数で } df = 0\right\}$$

である．$df = 0$ は $\dfrac{\partial f}{\partial x_1} = \cdots = \dfrac{\partial f}{\partial x_n} = 0$ と同値だから，これは f が定数関数であることを意味する．これは $H^0(M, \mathbb{R}) = \mathbb{R}$ の証明になっている．

$0 < r < n$ に対する $H^r(M, \mathbb{R})$ は単純でない．

トーラス $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 = (\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \times (\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ について，$H_1(T^2, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^2$ であったから，$H^1(T^2, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^2$ である．この基底を求めよう．

$\mathbb{R}^2$ の座標 (x, y) を $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ の局所座標と考える．ただし，T^2 においては $x = x+1, y = y+1$ という関係がある．$d(dx) = 0, d(dy) = 0$ だから，$dx, dy \in Z^1(T^2, \mathbb{R})$ である．円周 S^1 の場合と同様な議論で $dx, dy \notin B^1(T^2, \mathbb{R})$ であることがわかる．したがって，dx と dy の同値類が $H^1(M, \mathbb{R})$ の基底になる．

x 軸上の区間 $[0, 1]$ から定まるホモロジー類を γ_1, y 軸上の区間 $[0, 1]$ から定まるホモロジー類を γ_2 とおけば，

$$H_1(T^2, \mathbb{R}) = \mathbb{R}\gamma_1 \oplus \mathbb{R}\gamma_2$$

であって，

$$\int_{\gamma_1} dx = \int_{\gamma_2} dy = 1, \quad \int_{\gamma_2} dx = \int_{\gamma_1} dy = 0$$

という関係がある．

ところで，このことは，次の公式を利用しても説明できる，

M が 2 つの可微分多様体 N_1, N_2 の直積 $M = N_1 \times N_2$ であるとき，

$$H_r(M, \mathbb{R}) = \bigoplus_{p+q=r} H_p(N_1, \mathbb{R}) \otimes H_q(N_2, \mathbb{R})$$

$$H^r(M, \mathbb{R}) = \bigoplus_{p+q=r} H^p(N_1, \mathbb{R}) \otimes H^q(N_2, \mathbb{R})$$

($\mathbb{R}$ を $\mathbb{Z}$ とすると，この公式は成立しない.) 上の等式は，N_1 の p-単体と N_2 の q-単体の直積集合に M の $r = (p+q)$-鎖体を対応させることによって得られ，下の等式は，N_1 の p-形式 ω_1 と N_2 の q-形式 ω_2 に対し，M の $r = (p+q)$-形式 $\omega_1 \wedge \omega_2$ を対応させることによって得られる．$S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ として，$T^2 = S^1 \times S^1$ だから，

$$H^1(M, \mathbb{R}) = H^1(S^1, \mathbb{R}) \otimes H^0(S^1, \mathbb{R}) \oplus H^0(S^1, \mathbb{R}) \otimes H^1(S^1, \mathbb{R})$$

となり，円周 S^1 の計算結果から，dx と dy が $H^1(T^2, \mathbb{R})$ の基底であることがわかる．

参考文献 (第 1〜3 章)

[1] 河田敬義編『位相幾何学』, 現代数学演習叢書 2, 岩波書店, 1965.

[2] 松島与三『多様体入門』, 数学選書 5, 裳華房, 1965.

[3] 松本幸夫『多様体の基礎』, 東京大学出版会, 1988.

[4] スピヴァック (齋藤正彦訳)『多変数解析学』, 東京図書, 1972.

[5] シンガー&ソープ (赤 攝也監訳)『トポロジーと幾何学入門』, 培風館, 1976.

第 4 章

可換環上の加群のコホモロジー

西田康二

前章までに説明した多様体の (コ) ホモロジーの理論は，何度かの改良にともなって，そこで使う代数的な手法が整理されてきた．そして，この方法が多様体以外のいろいろな場面で適用できることが，多くの数学者達によって次々と発見された．これらのいろいろな (コ) ホモロジーの理論に共通するところを取り出して抽象化して整備した数学をホモロジー代数という．

そういうわけで，本章で述べることは多少抽象性が高く，この章だけを単独で読むと具体的なイメージが持ちにくいかもしれない．しかし，そのモデルは第 2, 3 章にある (コ) ホモロジーである．

ホモロジー代数は，それ以前に整備されていた環・体・加群の理論を基礎に構成されている．まず，これらについて必要最小限の知識をまとめておく．

4.1 環・体・加群

歴史的には，環は整数論における理想数 (イデアル) の理論から発生した．たとえば，

$$\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{m + n\sqrt{2} \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

というように，整数全体の集合に何個かの代数的な無理数を付け加えてできる集合が，環の原形であった．上の $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ のように，足し算，引き算，掛け

算について閉じていて，和と積について結合法則 $(x+y)+z=x+(y+z)$, $(xy)z=x(yz)$ を満たし，単位元 0, 1 を含み，分配法則 $(x+y)z=xz+yz$ と，和について交換法則 $x+y=y+x$ を満たす集合を**環**という．たとえば，2 次正方行列全体の集合も環であるが，掛け算に関する交換法則 $AB=BA$ は成立しない．このような環を**非可換環**といい，積に関する交換法則 $xy=yx$ を満たす環を**可換環**という．ホモロジー代数は非可換環でも構成でき，群のホモロジー群等で利用されるが，可換環の場合より少し記述が複雑になるので，本章では，可換環についてのみ扱い，だまって環と言ったら可換環を意味するものとする．

$\mathbb{Z}$ や $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ は可換環であるが，割り算については閉じていない．0 以外の元による割り算について閉じていて，$0 \neq 1$ を満たす環を**体** という．有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$，実数全体の集合 $\mathbb{R}$，複素数全体の集合 $\mathbb{C}$ は体である．

第 5 章で幾何学的な環や体，第 6 章では数論的な環や体が登場する．これらの場合，環や体は，図形や，数に対応し，その性質を表すのである．

たとえば，環 $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ にも数 $\sqrt{2}$ の性質が反映される．比較対象として，似たような環 $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]=\left\{m+n\sqrt{5} \mid m, n \in \mathbb{Z}\right\}$ を考える．環 $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ では，

$$4=2\times 2=(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)$$

という本質的に異なる 2 通りの 4 の素因数分解があり，素因数分解の一意性は成立しない．ところが，環 $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ では，素因数分解の一意性が成立する．

R が環のとき，R の元を係数とし $X_1, X_2, \cdots, X_n$ を変数とする多項式 $f(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 全体の集合を $R[X_1, X_2, \cdots, X_n]$ と書き R 係数**多項式環**という．これも大切な可換環の例であり，第 5 章で活躍する．

第 2 章で，加群 ($\mathbb{Z}$-加群) について少し述べたが，一般に R が環のとき，R-加群というものが定義でき，環 R と R-加群は切っても切り離せない関係にある．足し算と引き算について閉じていて，足し算について結合法則，交換法則を満たす集合 M が加群 ($\mathbb{Z}$-加群) であった．R-**加群**はさらに，$a \in R$ と $x \in M$ に対しスカラー倍 (R の作用) $ax \in M$ が定まっていて，この演算について閉じていて，分配法則 $(a+b)x=ax+bx$, $a(x+y)=ax+ay$, 結合法則 $(ab)x=a(bx)$, $1x=x$ を満たすものである．R が体のとき，R-加群は R-ベ

クトル空間とか，R-**線形空間**ともよばれる．たとえば，

$$R^n = \underbrace{R \oplus R \oplus \cdots \oplus R}_{n\text{ 個}} = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_i \in R\}$$

は R-加群である．R が体のときは，R-加群は大体こういうものであると考えても大きな間違いはないが，R が体でない環のときは，他にもいろいろな R-加群がある．たとえば，$R = \mathbb{Z}$ のとき，$\mathbb{Z} \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ は $\mathbb{Z}$-加群である．

M が R-加群で，M の部分集合 N が和とスカラー倍について閉じているとき，N も R-加群になるが，このとき N は M の R-**部分加群**であるという．第 2 章で説明した M/N も R-加群になる．

$\mathbb{Z}$-加群 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ は単に $\mathbb{Z}$-加群であるのみでなく，掛け算が定義できて環になっていた．一般に，環 R の部分集合 I が R-部分加群であるとき，R-加群 R/I には $[a]\cdot[b] = [ab]$ のように掛け算が定義できるので，R/I は環になる．I を**イデアル**とよぶ．特に，$x_1, x_2, \cdots, x_n \in R$ のとき，

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \left\{a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \in R \;\middle|\; a_i \in R\right\}$$

はイデアルである．これを $x_1, x_2, \cdots, x_n$ で生成されるイデアルとよぶ．特に，$n = 1$ のとき (x) を**単項イデアル**という．

環 $\mathbb{Z}$ においては $(2) = 2\mathbb{Z}$, $(n) = n\mathbb{Z}$ である．しかも，$\mathbb{Z}$ のイデアルは (n) という形のものしかない．1 変数多項式環 $\mathbb{R}[X]$ や $\mathbb{C}[X]$ のイデアルも $(f(X))$ という形のものしかない．しかし，$\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ では $(2, \sqrt{5}-1)$, $\mathbb{R}[X, Y]$ では (X, Y) という単項でないイデアルが存在する．$\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ では素因数分解の一意性は成立しないが，クンマーは $(2, \sqrt{5}-1)$ のようなイデアルを理想数とよび，理想数では素因数分解の一意性が成立することを発見した．この理想数という言葉がイデアルの語源となった．

代数学はもともと，多項式で書かれた方程式の解を求めたりすることから発生してきた学問である．ガロア理論では，有理数係数の方程式 $f(x) = 0$ を研究するために，環 $\mathbb{Q}[X]/(f(X))$ を考察する．$f(x)$ が有理数係数多項式の範囲で因数分解できないとき，$\mathbb{Q}[X]/(f(X))$ は体になる．たとえば，$\mathbb{R}[X]/(X^2+1) = \mathbb{C}$, $\mathbb{Z}[X]/(X^2-2) = \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ というように，多項式環をそのイデアルで

割ると，いろいろ面白い環が得られる．

代数学で扱う写像の大半は，準同型写像とよばれるものである．M, N が R-加群で写像 $f\colon M \to N$ が，$f(ax+by) = af(x)+bf(y)$ $(a, b \in R, x, y \in M)$ を満たすとき，f は R-加群の**準同型写像** であるという．たとえば，ベクトル空間の場合に行列から定まる写像は準同型写像である．ベクトル空間の間の準同型写像は，線形写像とか 1 次変換ともよばれる．

R, S が環の場合，写像 $f\colon R \to S$ が，$f(x+y) = f(x)+f(y)$, $f(xy) = f(x)f(y)$, $f(1) = 1$ を満たすとき，環の**準同型写像**であるという．

代数学では，考えている対象に与えられている演算をすべて保つ写像は，すべて準同型写像とよばれる．たとえば，群の準同型写像，束の準同型写像，層の準同型写像など，いろいろな場面で準同型写像という言葉が登場する．しかし，慣れてくると，いちいち定義を聞かなくても，自分で正しい定義が想像できるようになる．

また，ホモロジー代数学では，準同型写像以外の写像はめったに登場しないので，だまって $f\colon M \to N$ などと書いたら，それは準同型写像であると約束する．

$f\colon M \to N$ が準同型写像であり，全単射であって，逆写像 $f^{-1}\colon N \to M$ も準同型写像であるとき，f は**同型写像**であるという．f^{-1} も準同型写像であるという条件は，通常自動的に成立するから，確認する必要はない．同型写像 $f\colon M \to N$ が存在するとき，M と N は**同型**であるといい，$M \cong N$ 等と書く．これは，考えている構造 (たとえば R-加群の構造) について，M と N は表記上の相違を除けばまったく同じであることを意味し，しばしば $M = N$ とも書く．

R-加群 M から N への準同型写像 $f\colon M \to N$ 全体の集合を $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ と書く．たとえば，$R = \mathbb{R}$, $M = \mathbb{R}^m$, $N = \mathbb{R}^n$ の場合，準同型写像 $f\colon M \to N$ は n 行 m 列の行列と対応するので，$\mathrm{Hom}_R(M, N)$ は，n 行 m 列の行列全体の集合であると考えててもよい．一般の R-加群の場合 $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ はもう少し複雑なものになる．$\mathrm{Hom}_R(M, N)$ も R-加群になることには注意しておこう．

4.2　複体

第 2 章で登場した単体的複体 C_*，特異複体 $S_*(X)$，第 3 章で登場した実数係数の複体 $C_*(X, \mathbb{R})$ 等が共通に持つ性質を取り出して抽象化することにより，次の定義が得られる．

R は可換環で，各整数 n に対し C_n は R-加群であるとする．また，各 n に対し R-加群の準同型写像 $\partial_n\colon C_n \to C_{n-1}$ が与えられていて $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ (右辺の 0 はゼロ写像で，任意の元を 0 にうつす写像) を満たすとき

$$C_* : \cdots \xrightarrow{\partial_{n+2}} C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots$$

を**ホモロジー** R-**複体**という．このとき，

$$\begin{aligned} Z_n(C_*) &= \operatorname{Ker}\partial_n = \{x \in C_n \mid \partial_n(x) = 0\} \\ B_n(C_*) &= \operatorname{Im}\partial_{n+1} = \{\partial_{n+1}(x) \mid x \in C_{n+1}\} \\ H_n(C_*) &= \operatorname{Ker}\partial_n / \operatorname{Im}\partial_{n+1} = Z_n(C_*)/B_n(C_*) \end{aligned}$$

として，複体 C_* のホモロジー群 $H_n(C_*)$ を定義する．これは，第 2, 3 章でお馴染みの考え方である．

同様に，ド・ラームコホモロジーで扱ったように，C^n が R-加群で，$d^n\colon C^n \to C^{n+1}$ が $d^{n+1} \circ d^n = 0$ を満たすとき，

$$C^* : \cdots \xrightarrow{d^{n-2}} C^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} C^n \xrightarrow{d^n} C^{n+1} \xrightarrow{d^{n+1}} \cdots$$

を**コホモロジー** R-**複体**という．このとき，

$$\begin{aligned} Z^n(C^*) &= \operatorname{Ker} d^n = \{x \in C^n \mid d^n(x) = 0\} \\ B^n(C^*) &= \operatorname{Im} d^{n-1} = \{d^{n-1}(x) \mid x \in C^{n-1}\} \\ H^n(C^*) &= \operatorname{Ker} d^n / \operatorname{Im} d^{n-1} = Z^n(C^*)/B^n(C^*) \end{aligned}$$

として，複体 C^* のコホモロジー群 $H^n(C^*)$ を定義する．

ホモロジー複体でも，コホモロジー複体でも話はほとんど並行に進むが，今後の章では，コホモロジーのほうが主役になるから，ここから先は，コホモロジー複体のほうを使って説明する．

複体にも準同型写像が定義される．たとえば，コホモロジー R-複体 $C^* =$

$\{C^n, d_C^n\}$ から $K^* = \{K^n, d_K^n\}$ への準同型写像とは，R-加群の準同型写像 $f^n: C^n \to K^n$ の組 $f^* = \{f^n\}$ で，各 n に対し $f^{n+1} \circ d_C^n = d_K^n \circ f^n$ を満たすものをいう．このとき，$f^n: C^n \to K^n$ から，R-加群の準同型写像 $[f^n]: H^n(C^*) \to H^n(K^*)$ が自然に導かれる．

4.3 完全系列

(コ) ホモロジーを計算するためには，矢印 (→) がたくさん現れる図式を上手に取り扱う計算能力が必要である．普通のホモロジーの教科書には，ホモロジーの定義のずっと前に完全系列や可換図式の説明があり，これらを駆使して，いろいろな定理を証明していく．この勉強は野球で言えば基礎トレーニングのようなものであり，上達するためにはそれは不可欠だが，最初にそればかりしていては，プレーの面白味が分からず飽きてしまう．

第 2 章でマイヤー・ヴィートリス完全系列を紹介した．実は，完全系列というものがこれからのコホモロジーの計算の基礎になる．

各整数 $n = 0, 1, \cdots, r$ について，M_n が R-加群で，R-加群の準同型写像 $f_n: M_n \to M_{n+1}$ が与えられていて，各 n に対し，$\mathrm{Im}\, f_n = \mathrm{Ker}\, f_{n+1}$ が成り立つとき，

$$M_0 \xrightarrow{f_0} M_1 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_{r-2}} M_{r-1} \xrightarrow{f_{r-1}} M_r$$

は**完全系列**であるという．特に，

$$0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$$

という完全系列が基本的なものであり，これを**短完全系列**という．ここで，$0 \to L$ は 0 を 0 に写す写像，$N \to 0$ はすべての N の元を 0 に写す写像 (これ以外に準同型写像は考えられない) である．

一般に，$0 \to L \xrightarrow{f} M$ が完全系列であることは，f が単射であることと同値であり，$M \xrightarrow{g} N \to 0$ が完全であることは，g が全射であることと同値である．したがって，$0 \to L \xrightarrow{f} M \to 0$ が完全であることは，f が同型写像で，$L \cong M$ であることと同値になる．

L が M の部分加群であるとき，$0 \to L \xrightarrow{f} M \to M/L \to 0$ $(f(x) = x)$ と

いう完全系列が構成できる．逆に，全射 $g\colon M \to N$ があるとき，$0 \to \operatorname{Ker} g \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$ $(f(x) = x)$ という完全系列ができる．したがって，

$$0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$$

という完全系列が存在する場合，f によって L は M の部分 R-加群であるとみなすことができ，$N = M/f(L) = M/L$ であると考えられる．

一般に，準同型写像 $f\colon M \to N$ があるとき，

$$\operatorname{Coker} f = N/\operatorname{Im} f$$

と定義すれば，

$$0 \to \operatorname{Ker} f \xrightarrow{h} M \xrightarrow{f} N \to \operatorname{Coker} f \to 0$$
$$0 \to \operatorname{Ker} f \xrightarrow{h} M \xrightarrow{f} \operatorname{Im} f \to 0$$

$(h(x) = x)$ という完全系列が構成できる．なお，準同型定理により $M/\operatorname{Ker} f \cong \operatorname{Im} f$ なので，$\operatorname{Coim} f$ を $M/\operatorname{Ker} f$ と定義してもそれは $\operatorname{Im} f$ に一致してしまう．

$$0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$$

がベクトル空間の完全系列である場合には，$\dim M = \dim L + \dim N$ が成立する．U, V があるベクトル空間の部分空間のとき，

$$0 \to (U \cap V) \xrightarrow{f} (U \oplus V) \xrightarrow{g} (U + V) \to 0$$

(ただし，$f(x) = (x, x)$, $g(x, y) = x - y$) という完全系列ができるので，

$$\dim U + \dim V = \dim(U \oplus V) = \dim(U + V) + \dim(U \cap V)$$

という公式が導かれる．

もっと一般に，$0 \to V_0 \to V_1 \to V_2 \to \cdots \to V_n \to 0$ が有限次元ベクトル空間の完全系列であれば，

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim V_i = \dim V_0 - \dim V_1 + \dim V_2 - \cdots + (-1)^n \dim V_n = 0$$

という次元公式が成り立つ．

(コ) ホモロジーで頻繁に登場する次の図式を見てみよう.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N & \to & 0 \\ & & \alpha\downarrow & & \downarrow\beta & & \downarrow\gamma & & \\ 0 & \to & L' & \xrightarrow{f'} & M' & \xrightarrow{g'} & N' & \to & 0 \end{array}$$

$\beta\circ f = f'\circ\alpha,\ \gamma\circ g = g'\circ\beta$ が成り立つとき, 矢印の方向にどういう経路で進んでも, 写像の合成が同じものになる. このように, 写像の結果が経路によらないとき, この図式は**可換**であるとか, **可換図式**であるという.

ところで, 上の図式で, 横の 2 本の系列がいずれも短完全系列であるとすると次のような完全系列が構成できる. これを, **蛇の補題**という.

$$0 \to \operatorname{Ker}\alpha \to \operatorname{Ker}\beta \to \operatorname{Ker}\gamma \to \operatorname{Coker}\alpha \to \operatorname{Coker}\beta \to \operatorname{Coker}\gamma \to 0$$

4.4 半完全関手

ここまでは, 多様体からできる複体の (コ) ホモロジーの真似をしていただけだが, これからは抽象代数の驚異的な成果である導来関手というものを説明する. この考え方も, 具体的に構成されていた幾つかの理論を統一的に取り扱おうという精神から始まる.

まず, 関手について説明する. 関手は**圏** (カテゴリー) とよばれるものの間の一種の写像のようなものである. 圏の定義は面倒だから省略して, その例を幾つか知ることで満足しよう. 圏は対象とよばれるものの集まり (集合とは限らない) と射 (準同型写像) の集まりを併せた概念である. たとえば, 集合の圏では対象は集合全体, 射は写像全体であり, 位相空間の圏では対象は位相空間全体, 射は連続写像全体, 群の圏では対象は群全体, 射は群の準同型写像全体, 環の圏では対象は環全体, 射は環の準同型写像全体である. これから, 使うのは, 環 R を 1 つ固定したとき, 対象を R-加群全体, 射を R-加群の準同型写像全体と定義した R-加群の圏である. この R-加群の圏では, 上で説明した完全系列というものがある. 一般に, 完全系列という概念が定義できる圏を**アーベル圏**という. (正確にいうと, ゼロ対象 0 を持ち, 直和と直積が定義さ

れ，射の集合 $\mathrm{Hom}(X, Y)$ が加群で，写像の合成と和について分配法則が成立ち，Ker と Coker が存在し，準同型定理が成り立つ圏がアーベル圏である.)

$\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2$ を圏とする．今，圏 $\mathfrak{C}_1$ の各対象 M に対し，$\mathfrak{C}_2$ の対象 $T(M)$ をただ 1 つ対応させる規則 T が与えられているとする．さらに，M, N が $\mathfrak{C}_1$ の対象で，(*)「$f\colon M \to N$ が $\mathfrak{C}_1$ の射であるとき，$\mathfrak{C}_2$ の射 $T(f)\colon T(M) \to T(N)$ がただ 1 つ対応していて，$T(f \circ g) = T(f) \circ T(g), T(\mathrm{id}_M) = \mathrm{id}_{T(M)}$ が成り立つ」とする．ここで，id_M は恒等写像 $\mathrm{id}_M\colon M \to M, \mathrm{id}_M(x) = x$ を表す．この，$\mathfrak{C}_1$ の対象と射に，$\mathfrak{C}_2$ の対象と射を対応させる規則を，$\mathfrak{C}_1$ から $\mathfrak{C}_2$ への**共変関手**という.

たとえば，次の例は，R-加群の圏から R-加群の圏への共変関手である．R-加群 E を固定して，R-加群 M に対し，$T(M) = \mathrm{Hom}_R(E, M)$ とおくと，$T(M)$ も R-加群になる．また，R-加群の準同型写像 $f\colon M \to N$ に対し，$T(f)\colon T(M) \to T(N)$ を $\varphi \in T(M) = \mathrm{Hom}_R(E, M)$ に対し，$T(f)(\varphi) = f \circ \varphi \in T(N)$ によって定める．ところで，この関手は完全系列を，ちょっと不完全な系列に変換する．つまり，

$$0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$$

が完全系列のとき，

$$0 \to T(L) \xrightarrow{T(f)} T(M) \xrightarrow{T(g)} T(N)$$

は完全であるが，最後の $T(M) \xrightarrow{T(g)} T(N) \to 0$ は完全であるとは限らない．なぜなら，準同型写像 $E \to N$ が $E \to M \xrightarrow{g} N$ と分解できるとは限らないからである．このような性質を持つ共変関手は**左 (半) 完全**であるという．後で説明するように，このような関手からはコホモロジーが生まれてくる.

$0 \to T(L) \xrightarrow{T(f)} T(M) \xrightarrow{T(g)} T(N) \to 0$ が必ず完全系列になるような関手 T は**完全関手**とよばれるが，そういう関手からはコホモロジーは出てこないのである.

ところで，関手には共変関手の他に，**反変関手**というものがある．それは，共変関手の定義において条件 (*) の部分を次のように変更したものである．(*)「$f\colon M \to N$ が $\mathfrak{C}_1$ の射であるとき，$\mathfrak{C}_2$ の射 $T(f)\colon T(N) \to T(M)$ がただ

1 つ対応していて，$T(f \circ g) = T(g) \circ T(f)$, $T(\mathrm{id}_M) = \mathrm{id}_{T(M)}$ が成り立つ.」

ここで，$\mathfrak{C}_1$ と $\mathfrak{C}_2$ では写像の向きが逆になることに注意する．たとえば，R-加群 E を固定して，R-加群 M に対し，$T(M) = \mathrm{Hom}_R(M, E)$ とおくと，$f\colon M \to N$ に対し，$T(f)\colon T(N) \to T(M)$ が $\varphi \in T(N)$ に対し $T(f)(\varphi) = \varphi \circ f \in T(M)$ として定まるから，T は R-加群の圏から R-加群の圏への反変関手になる．この反変関手においても，

$$0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$$

が完全系列のとき，

$$0 \to T(N) \xrightarrow{T(g)} T(M) \xrightarrow{T(f)} T(L)$$

は完全であるが，最後の $T(M) \xrightarrow{T(f)} T(L) \to 0$ は完全であるとは限らない．準同型写像 $L \to E$ が $M \to E$ に拡張できるとは限らないからである．このような関手を，**左 (半) 完全反変関手**といい，これからも，コホモロジーが生じてくる．

他にも，右半完全共変関手，右半完全反変関手があり，これらからはホモロジー群が出てくる．第 5 章以降でも，いろいろな半完全関手が登場する．

この 4 種類の半完全関手から生まれてくる (コ) ホモロジーは，導来関手とよばれる．導来関手ももとの関手に応じて 4 種類できるのだが，構成方法は射 (矢印) の向きが異なるだけで，ほとんど同じである．ここでは，左半完全共変関手の場合を中心に述べる．

4.5 導来関手

(コ) ホモロジーを作るためには，まず，複体を構成しないといけない．

R-加群 I が**単射的** (移入的，入射的) であるとは，準同型写像 $g\colon L \to I$ と完全系列 $0 \to L \xrightarrow{f} M$ が任意に与えられたとき，$g = h \circ f$ を満たすような準同型写像 $h\colon M \to I$ が必ず存在することをいう．

任意の R-加群 M に対し $M \subset I$ となるような単射的加群 I が存在する．たとえば，$\mathbb{Z}$-加群 $M = \mathbb{Z}^n$ の場合，$I = \mathbb{Q}^n$ がそのような単射的加群である．

今，$I^0 = I$ とし，I^0/M を含む単射的加群 I^1 をとる．$I^0 \to I^0/M$ と $I^0/M \subset I^1$ の合成写像を $\partial^0 \colon I^0 \to I^1$ とすると，$0 \to M \to I^0 \xrightarrow{\partial^0} I^1$ は完全系列になる．以下同様に，単射的加群 $I^2, I^3, \cdots$ を

$$0 \to M \to I^0 \xrightarrow{\partial^0} I^1 \xrightarrow{\partial^1} I^2 \xrightarrow{\partial^2} I^3 \xrightarrow{\partial^3} \cdots$$

が完全系列になるように構成できる．これを，M の**単射的分解**という．上の完全列の $0 \to M \to I^0$ を $0 \to I^0$ でおきかえた系列

$$0 \to I^0 \xrightarrow{\partial^0} I^1 \xrightarrow{\partial^1} I^2 \xrightarrow{\partial^2} I^3 \xrightarrow{\partial^3} \cdots$$

はもはや完全列ではないが，コホモロジー複体になっている．しかし，この複体のコホモロジー群は，$H^0(I^*) = M$, $n \geqq 1$ のとき $H^n(I^*) = 0$ であって，全然面白くない．

今 T が左半完全共変関手であるとする．複体 I^* から $T(I^*)$ を作る．つまり，

$$0 \to T(I^0) \xrightarrow{T(\partial^0)} T(I^1) \xrightarrow{T(\partial^1)} T(I^2) \xrightarrow{T(\partial^2)} T(I^3) \xrightarrow{T(\partial^3)} \cdots$$

を考える．簡単のため，$d^n = T(\partial^n)$ と書こう．$\partial^n \circ \partial^{n-1} = 0$ だから，$d^n \circ d^{n-1} = 0$ が成立する．つまり，$T(I^*)$ も複体になる．$\operatorname{Ker} \partial^n = \operatorname{Im} \partial^{n-1}$ であったが，T は左半完全だから，もはや $\operatorname{Ker} d^n = \operatorname{Im} d^{n-1}$ は成立するとは限らない．そこで，複体 $T(I^*)$ のコホモロジー群を

$$\mathbf{R}^n T(M) = H^n(T(I^*)) = \operatorname{Ker} d^n / \operatorname{Im} d^{n-1}$$

と書く．この $\mathbf{R}^n T(M)$ は M の単射的分解をどのように選んでも，常に同じものが得られる．

また，準同型写像 $f \colon M \to N$ から自然に，準同型写像

$$\mathbf{R}^n T(f) \colon \mathbf{R}^n T(M) \to \mathbf{R}^n T(N)$$

が定まる．つまり $\mathbf{R}^n T$ は R-加群の圏から R-加群の圏への共変関手になる．この $\mathbf{R}^n T$ を左半完全共変関手 T の n 次**右導来関手**という．

ところで，T は左半完全だから，$0 \to T(M) \to T(I^0) \to T(I^1)$ は完全である．したがって，

$$\mathbf{R}^0T(M) = \operatorname{Ker} d^0 / \operatorname{Im} d^{-1} = T(M)/\{0\} = T(M)$$

となる．

今は，R-加群の圏で説明したが，一般にアーベル圏 $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2$ と左半完全共変関手 $T\colon \mathfrak{C}_1 \to \mathfrak{C}_2$ があるとき，圏 $\mathfrak{C}_1$ において単射的分解が構成できれば，T の右導来関手 $\mathbf{R}^nT$ が構成できる．

T が左半完全半変関手の場合には，単射的分解の代わりに射影的分解とよばれるものを利用して，導来関手を構成する．

R-加群 P が**射影的**であるとは，準同型写像 $g\colon P \to L$ と完全系列 $M \xrightarrow{f} L \to 0$ が任意に与えられたとき，$g = f \circ h$ を満たすような準同型写像 $h\colon P \to M$ が必ず存在することをいう．この定義は単射的加群の定義に登場する矢印 $\to$ を全部反対向きにしただけのものである．このように矢印を反対向きにして得られる概念を**双対**という．射影的分解は単射的分解の双対として構成できる．つまり，任意の R-加群 M に対し，ある射影的 R-加群 P と全射準同型写像 $f\colon P \to M$ が存在する．たとえば，

$$M = \left\{a_1x_1 + \cdots + a_nx_n \mid a_i \in R\right\}$$

の場合，$P = R^n$ は射影的 R-加群だから，f を $f(a_1, \cdots, a_n) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$ と定めれば目的のものが得られる．各 P_n が射影的で，

$$\cdots \to P_3 \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$$

が完全系列であるとき，これを M の**射影的分解**という．作り方は，単射的分解とほぼ同様である．

ホモロジー複体 $P^*\colon \cdots \to P_3 \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to 0$ を左半完全半変関手 T で変換すると，コホモロジー複体

$$T(P_*)\colon \quad 0 \to T(P_0) \to T(P_1) \to T(P_2) \to T(P_3) \to \cdots$$

が得られる．そのコホモロジー群が右導来関手 $\mathbf{R}^nT(M) = H^n(T(P_*))$ である．

右半完全共変 (反変) 関手 T についても，単射的分解や射影的分解を利用して，ホモロジー複体を構成し，**左導来関手** $\mathbf{L}_nT$ が定義できる．

4.6　導来関手 Ext

$T_1(N) = \mathrm{Hom}_R(M, N)$ は左半完全共変関手，$T_2(M) = \mathrm{Hom}_R(M, N)$ は左半完全反変関手であるが，

$$\mathbf{R}^n T_1(N) = \mathbf{R}^n T_2(M)$$

が成り立つ．このことは，後で説明する 2 重複体の理論から証明できる．そこで，$\mathrm{Ext}_R^n(M, N) = \mathbf{R}^n T_1(N) = \mathbf{R}^n T_2(M)$ と書く．

$\mathrm{Ext}_R^n(M, N)$ を導来関手の定義から直接計算することは容易ではないが，$R = \mathbb{Z}$ のような簡単な環では，計算できることもある．ここで，次の事実を認めて使う．

(1) $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$ は $\mathbb{Z}$-加群 $\mathbb{Z}$ の単射的分解である．

(2) $0 \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$ は $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ の単射的分解である．

(3) $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to 0 (f(x) = nx)$ は $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ の射影的分解である．

$\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}^n(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ を 2 通りの方法で計算してみよう．まず，$\mathbb{Z}$ の単射的分解を使って計算してみる．(1) から定まる複体 $0 \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$ に共変関手 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \cdot\,)$ を施すと，複体

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Q}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to 0$$

が得られる．$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Q}) = 0$, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ だから，

$$\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}^n(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (n \neq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となる．

次に，(3) から定まる複体 $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \to 0$ $(f(x) = 2x)$ に反変関手 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\cdot, \mathbb{Z})$ を施すと，複体

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \to 0$$

が得られる．$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ を使ってこれを書き直すと $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{f^*} \mathbb{Z} \to 0$ であるが，$f^*(x) = 2x$ に注意すると，上と同じ結果が得られる．

今の計算では，$\mathbb{Z}$-加群の単射的分解や射影的分解は，$n \geqq 2$ のとき $I^n = 0$, $P_n = 0$ であったために，$n \geqq 2$ のとき $\mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}}(M, N) = 0$ となっている．実は，この事実は任意の $\mathbb{Z}$-加群 M, N について成り立つ．

一般の (ネーター) 環 R においても，$n \geqq n_0 + 1$ ならば，任意の R-加群 M, N について $\mathrm{Ext}^n_R(M, N) = 0$ となるような n_0 が存在する場合がある．このような最小の n_0 を**大域次元**とか**コホモロジー次元**という．第 5 章で，大域次元と幾何学的な次元の関係について述べる．

4.7 テンソル積と導来関手 Tor

テンソル積も，代数学を勉強するときの難所の 1 つである．R-加群 M, N のテンソル積 $M \underset{R}{\otimes} N$ の定義を教科書的に書くことはやめて，その心を語ろう．$M \underset{R}{\otimes} N$ は

$$(x_1 \otimes y_1) + (x_2 \otimes y_2) + \cdots + (x_k \otimes y_k)$$

$(x_i \in M,\, y_i \in N)$ という形の元全体の集合であって，次のような計算規則がある．$x, x_i \in M,\, y, y_i \in N,\, a \in R$ とする．このとき

(1) $(x_1 + x_2) \otimes y = (x_1 \otimes y) + (x_2 \otimes y)$

(2) $x \otimes (y_1 + y_2) = (x \otimes y_1) + (x \otimes y_2)$

(3) $a(x \otimes y) = (ax) \otimes y = x \otimes (ay)$

テンソル積 $\underset{R}{\otimes}$ と直和 $\oplus$ の間には

$$(M_1 \oplus M_2) \underset{R}{\otimes} N = (M_1 \underset{R}{\otimes} N) \oplus (M_2 \underset{R}{\otimes} N)$$

という分配法則が成り立つ．また $M \underset{R}{\otimes} N \cong N \underset{R}{\otimes} M$ という交換法則も成り立つ．これらの公式から，$R = \mathbb{R}$ で，M が $e_1, e_2, \cdots, e_m$ を基底とするベクトル空間 $\mathbb{R}^m$, N が $e'_1, e'_2, \cdots, e'_n$ を基底とするベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ ならば，$\mathbb{R}^m \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathbb{R}^n$ は $e_i \otimes e'_j$ という形の mn 個の元を基底とする mn 次元のベクトル空間 $\mathbb{R}^{mn}$ である．

R が体でない環の場合は，テンソル積の計算はもう少し複雑になる．た

とえば，$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\underset{\mathbb{Z}}{\otimes}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ においては，$1\otimes 1 = 1\otimes(2\cdot 2) = 2(1\otimes 2) = (2\cdot 1)\otimes 2 = 0\otimes 2 = 0(1\otimes 2) = 0$ となるので，$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\underset{\mathbb{Z}}{\otimes}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) = 0$ である．一般に，自然数 m, n の最大公約数を d とすれば，

$$(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})\underset{\mathbb{Z}}{\otimes}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$$

となる．その他，いくつかの計算例をあげておく．

$$\begin{aligned}
&\mathbb{R}[X]\underset{\mathbb{R}}{\otimes}\mathbb{R}[X] \cong \mathbb{R}[X,Y]\\
&\mathbb{R}[X,Y]\underset{\mathbb{R}[X]}{\otimes}\mathbb{R}[X,Z] \cong \mathbb{R}[X,Y,Z]\\
&(\mathbb{R}[X,Y]/(f))\underset{\mathbb{R}[X,Y]}{\otimes}(\mathbb{R}[X,Y]/(g)) \cong \mathbb{R}[X,Y]/(f,g)
\end{aligned}$$

ところで，E が R-加群のとき，R-加群の完全系列 $0\to L\to M\to N\to 0$ に $\underset{R}{\otimes}E$ すると，

$$(L\underset{R}{\otimes}E)\to(M\underset{R}{\otimes}E)\to(N\underset{R}{\otimes}E)\to 0$$

という完全系列が得られるが，$0\to(L\underset{R}{\otimes}E)\to(M\underset{R}{\otimes}E)$ は必ずしも完全でない．つまり，関手 $T(M) = M\underset{R}{\otimes}E$ は右半完全共変関手である．このとき，M の射影的分解を利用することによって，左導来関手 $\mathbf{L}_nT(M)$ が定義できる．このとき，

$$\mathrm{Tor}_n^R(M,E) = \mathbf{L}_nT(M)$$

として，導来関手 Tor_*^R を定義する．これを，M と E の n 次**ねじれ加群**とよぶこともある．

この場合も，$\mathrm{Tor}_n^R(M, N)\cong\mathrm{Tor}_n^R(N, M)$ が成り立ち，N の射影的分解を使って Tor を計算しても，M の射影的分解を使って計算しても同じ結果が得られる．これも，あとで説明する 2 重複体の理論を使って証明できる．

たとえば，$\mathbb{Z}$-加群 $M = \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})$ において，$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ を M の**自由部分**，$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ を**ねじれ部分**という．試しに，$\mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, M)$ を計算してみよう．$0\to\mathbb{Z}\xrightarrow{f}\mathbb{Z}\to(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})\to 0$ $(f(x) = 3x)$ が $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ の射影的分解だから，複体

$$0 \to (\mathbb{Z} \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} M) \to (\mathbb{Z} \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} M) \to 0$$

のホモロジー群を計算すればよい．$R \underset{R}{\otimes} N = N$ だから，この複体は，

$$0 \to (\mathbb{Z}^2 \oplus (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})) \xrightarrow{f_*} (\mathbb{Z}^2 \oplus (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})) \to 0$$

である．ここで，$f_*(x, y, z) = (3x, 3y, 3z)$ だから，

$$\begin{aligned} &\mathrm{Tor}_0^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, M) = (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} M = (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3 \\ &\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, M) = (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \\ &\mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, M) = 0 \qquad (n \geqq 2 \text{ のとき}) \end{aligned}$$

を得る．$\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}$ には M の位数 3 のねじれ部分が現れることに注意する．

Tor はもともと，位相多様体のホモロジー群に登場するものであった．第 3 章で述べた公式

$$H_r(M \times N, \mathbb{R}) = \bigoplus_{p+q=r} H_p(M, \mathbb{R}) \otimes H_q(N, \mathbb{R})$$

において，$\mathbb{R}$ を $\mathbb{Z}$ とすると，上の公式は修正を要し次のようになる．

$$\begin{aligned} &H_r(M \times N, \mathbb{Z}) \\ &= \left(\bigoplus_{p+q=r} H_p(M, \mathbb{Z}) \otimes H_q(N, \mathbb{Z}) \right) \oplus \left(\bigoplus_{p+q=r-1} \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_p(M, \mathbb{Z}), H_q(N, \mathbb{Z})) \right) \end{aligned}$$

体 K では，$n \geqq 1$ のとき $\mathrm{Tor}_n^K(M, N) = 0$ となるので，$\mathbb{R}$ のほうの公式では $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{R}}$ の項が現れないのである．

4.8 導来関手の計算方法

導来関手の定義はできたが，具体的にそれを計算する手段がなければ，あまり役に立たない．導来関手の計算基本は次の (コ) ホモロジー完全系列である．

定理． $0 \to L \to M \to N \to 0$ は完全系列であるとする．
(1) T が左半完全共変関手ならば，次の完全系列が構成できる．

$$0 \to T(L) \to T(M) \to T(N) \to \mathbf{R}^1 T(L) \to \mathbf{R}^1 T(M) \to \mathbf{R}^1 T(N)$$

$$\to \mathbf{R}^2T(L) \to \mathbf{R}^2T(M) \to \mathbf{R}^2T(N) \to \mathbf{R}^3T(L) \to \mathbf{R}^3T(M) \to \cdots$$

(2) T が左半完全反変関手ならば，次の完全系列が構成できる．

$$\begin{aligned} 0 &\to T(N) \to T(M) \to T(L) \to \mathbf{R}^1T(N) \to \mathbf{R}^1T(M) \to \mathbf{R}^1T(L) \\ &\to \mathbf{R}^2T(N) \to \mathbf{R}^2T(M) \to \mathbf{R}^2T(L) \to \mathbf{R}^3T(N) \to \mathbf{R}^3T(M) \to \cdots \end{aligned}$$

(3) T が右半完全共変関手ならば，次の完全系列が構成できる．

$$\begin{aligned} \cdots &\to \mathbf{L}_3T(M) \to \mathbf{L}_3T(N) \to \mathbf{L}_2T(L) \to \mathbf{L}_2T(M) \to \mathbf{L}_2T(N) \\ &\to \mathbf{L}_1T(L) \to \mathbf{L}_1T(M) \to \mathbf{L}_1T(N) \to T(L) \to T(M) \to T(N) \to 0 \end{aligned}$$

(4) T が右半完全反変関手ならば，次の完全系列が構成できる．

$$\begin{aligned} \cdots &\to \mathbf{L}_3T(M) \to \mathbf{L}_3T(L) \to \mathbf{L}_2T(N) \to \mathbf{L}_2T(M) \to \mathbf{L}_2T(L) \\ &\to \mathbf{L}_1T(N) \to \mathbf{L}_1T(M) \to \mathbf{L}_1T(L) \to T(N) \to T(M) \to T(L) \to 0 \end{aligned}$$

加藤和也氏の言葉をかりれば，(1) の場合，$T(M) \to T(N) \to 0$ が完全にならない恨みが導来関手となって，$T(N)$ の後に続くのである．

上のような完全系列は**長完全系列**とか **(コ) ホモロジー長完全系列**とよばれ，具体的な計算例が第 5 章などで登場する．第 2 章で登場したマイヤー・ヴィートリス完全系列もホモロジー完全系列の 1 つである．このように，長完全系列は，未知の (コ) ホモロジーを既知の (コ) ホモロジーを使って計算する基本的な道具である．

4.9　2 重複体とスペクトル系列

$\mathrm{Ext}_R^n(M, N)$ にしても，$\mathrm{Tor}_n^R(M, N)$ にしても，2 つの変数 M, N を持ち，その各々について単射的または射影的分解があり，どちらの変数の分解を利用して計算しても同じ導来関手が得られるのであった．それを証明するには，2 つの変数の分解を同時に実行してできる複体を考察する必要がある．このような複体にもホモロジー 2 重複体 $\{C_{p,q}\}$ (Tor の場合) とコホモロジー 2 重複体 $\{C^{p,q}\}$ (Ext の場合) があるのだが，応用上後者のほうが役に立つので，そちらを説明する．

$\cdots \xrightarrow{\partial_3} P_2 \xrightarrow{\partial_2} P_1 \xrightarrow{\partial_1} P_0 \to M \to 0$ を M の射影的分解，$0 \to N \to I^0$

$\xrightarrow{d^0} I^1 \xrightarrow{d^1} I^2 \xrightarrow{d^2} \cdots$ を N の単射的分解とする．$C^{p,q} = \mathrm{Hom}_R(P_p, I^q)$ とおくと，∂_{p+1} から定まる準同型写像

$$d_1^{p,q}\colon C^{p,q} \to C^{p+1,q}$$

と，d^q から定まる準同型写像

$$d_2^{p,q}\colon C^{p,q} \to C^{p,q+1}$$

ができる．いずれも，$d_1^{p+1,q} \circ d_1^{p,q} = 0$, $d_2^{p,q+1} \circ d_2^{p,q} = 0$ を満たし，また，$d_2^{p+1,q} \circ d_1^{p,q} = d_1^{p,q+1} \circ d_2^{p,q}$ が成り立つ．

一般に，このような条件を満たす $C = \{C^{p,q}, d_1^{p,q}, d_2^{p,q}\}$ を (コホモロジー) **2 重複体**という．

2 重複体では，次の 2 種類のコホモロジー群が定義できる．

$$H_1^p(C^{*,q}) = \mathrm{Ker}\, d_1^{p,q} / \mathrm{Im}\, d_1^{p-1,q}, \quad H_2^q(C^{p,*}) = \mathrm{Ker}\, d_2^{p,q} / \mathrm{Im}\, d_2^{p,q-1}$$

$\{H_1^p(C^{*,q}), d_2\}$, $\{H_2^q(C^{p,*}), d_1\}$ もコホモロジー複体だから，さらに，

$$H_2^q(H_1^p(C)), \quad H_1^p(H_2^q(C))$$

というコホモロジーが定義できる．これ以外に，次のようなコホモロジーも定義できる．

$C^r = \displaystyle\bigoplus_{p+q=r} C^{p,q}$ とし，$x = (x_{0,r}, x_{1,r-1}, \cdots, x_{r,0}) \in C^r$ $(x_{p,q} \in C^{p,q})$ に対し，

$$d_0^r(x) = \sum_{i=0}^{r} \left(d_1^{i,r-i}(x_{i,r-i}) + (-1)^i d_2^{i,r-i}(x_{i,r-i})\right)$$

として準同型写像 $d_0^r\colon C^r \to C^{r+1}$ を定義する．すると，$d_0^r \circ d_0^{r-1} = 0$ を満たすから，第 3 のコホモロジー群

$$H_0^r(C) = \mathrm{Ker}\, d_0^r / \mathrm{Im}\, d_0^{r-1}$$

が定義できる．

議論は対称的だから，$H_1^p(H_2^q(C))$ と $H_0^r(C)$ の関係を調べてみよう．そのためには，スペクトル系列というものを利用するとよい．このスペクトル系列

は，コホモロジーの計算においてしばしば登場し，第 5 章でも 2 種類のスペクトル系列が登場する．スペクトル系列の一般的な定義は添え字が多くて，最初にそれを述べても意味が分かりにくい．ここでは，2 重複体からスペクトル系列を構成して，スペクトル系列という複雑なものが，実は自然に発生してくるものであることを観察しよう．

$$C^n = \bigoplus_{p+q=n} C^{p,q} \qquad W^n(C) = \bigoplus_{p \geqq n} C^p$$

$$F^n(C) = \bigoplus_{i=n}^{\infty} \bigoplus_{q=0}^{\infty} C^{i,q} \qquad Z_r^n = \left\{ x \in F^n(C) \;\middle|\; d(x) \in F^{n+r}(C) \right\}$$

$$B_r^n = \left\{ d(x) \in F^n(C) \;\middle|\; x \in Z_r^{n-r} \right\} \qquad E_r^n = Z_r^n / (Z_{r-1}^{n+1} + B_{r-1}^n)$$

$$W^n(E_r^n) = \bigoplus_{p \geqq n} E_r^p \qquad E_r^{p,q} = W^{p+q}(E_r^p)/W^{p+q+1}(E_r^p)$$

とおく．ここで，$d\colon F^n(C) \to F^{n+r}(C)$ は d_0 から定まる写像である．$d\colon F^{p+q}(C) \to F^{p+q+r}(C)$ の定義域を Z_r^p に制限するとその値域は Z_r^{p+r} に含まれる．この写像を $\widetilde{d_r^p}\colon Z_r^p \to Z_r^{p+r}$ とする．$\widetilde{d_r^p}(Z_{r-1}^{p+1} + B_{r-1}^p) = d(Z_{r-1}^{p+1}) = B_{r-1}^{p+r}$ だから，次の可換図式が得られる．

$$\begin{array}{ccc}
Z_r^p & \xrightarrow{\widetilde{d_r^p}} & Z_r^{p+r} \\
\big\downarrow \pi_r^p & & \big\downarrow \pi_r^{p+r} \\
E_r^p = \dfrac{Z_r^p}{Z_{r-1}^{p+1} + B_{r-1}^p} & \xrightarrow{d_r^p} & \dfrac{Z_r^{p+r}}{Z_{r-1}^{p+r+1} + B_{r-1}^{p+r}} = E_r^{p+r}
\end{array}$$

$d(W^{p+q}(Z_r^p)) \subset W^{p+q+1}(Z_r^{p+r})$ だから，この $d_r^p\colon E_r^p \to E_r^{p+r}$ から，準同型写像

$$d_r^{p,q}\colon E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q-r+1} = W^{p+q+1}(Z_r^{p+r})/W^{p+q+2}(Z_r^{p+q})$$

が定まる．$d \circ d = 0$ だから，$d_r^{p,q} \circ d_r^{p-r,q+r-1} = 0$ である．

ここで，$B_{r-1}^p \subset B_r^p$, $Z_{r-1}^{p+1} \cap Z_{r+1}^p = Z_r^{p+1}$ に注意する．

$$\operatorname{Ker} d_r^p = (Z_{r-1}^{p+1} + Z_{r+1}^p)/(Z_{r-1}^{p+1} + B_{r-1}^p)$$
$$\operatorname{Im} d_r^{p-r} = (Z_{r-1}^{p+1} + B_r^p)/(Z_{r-1}^{p+1} + B_{r-1}^p)$$

だから，$\mathrm{Ker}\, d_r^p / \mathrm{Im}\, d_r^{p-r} \cong E_{r+1}^p$ が得られる．これに W^{p+q} をほどこせば，

$$\mathrm{Ker}\, d_r^{p,q} / \mathrm{Im}\, d_r^{p-r,q+r-1} = E_{r+1}^{p,q}$$

が得られる．

$$Z_\infty^n = \bigcap_{r=0}^{\infty} Z_r^n, \quad B_\infty^n = \bigcup_{r=0}^{\infty} B_r^n$$

とおくと，

$$B_2^n \subset B_3^n \subset B_4^n \subset \cdots \subset B_\infty^n \subset Z_\infty^n \subset \cdots \subset Z_4^n \subset Z_3^n \subset Z_2^n$$

が成り立つ．$p < 0$ または $q < 0$ のとき $Z_r^{p,q} = 0$ だから，$r > \max\{p, q+1\}$ であれば，$E_r^{p,q} = E_{r+1}^{p,q} = E_{r+2}^{p,q} = \cdots$ が成り立つ．これを $E_\infty^{p,q} = E_r^{p,q}$ と書く．

ここで，$E^n = H_0^n(C)$ とおく．$F^p(C)$ から $F^p(E^n)$ が自然に $F^p(E^n)$ が定まり，

$$E^n = F^0(E^n) \supset F^1(E^n) \supset \cdots \supset F^n(E^n) \supset F^{n+1}(E^n) = 0$$

を満たす．

一般に，上のような性質を満たす $\{E_r^{p,q}, d_r^{p,q}, E^n\}$ を**スペクトル系列**といい，$E_2^{p,q} \Rightarrow E^n$ と書く．また，丁寧に計算してみると，

$$E_2^{p,q} = H_1^p(H_2^q(C))$$

であることがわかる．

ところで，スペクトル系列 $E_2^{p,q} \Rightarrow E^n$ は以下の性質を満たすことが簡単な計算でわかる．

(1) $0 \to E_2^{1,0} \to E^1 \to E_2^{0,1} \to E_2^{2,0} \to E^2$ は完全系列である．

(2) 整数 $i \geqq 2$ を固定する．$E_2^{1,i-1} = E_2^{2,i-2} = \cdots = E_2^{i-2,2} = E_2^{i-1,1} = 0$, $E_2^{2,i-1} = E_2^{3,i-2} = \cdots = E_2^{i-1,2} = E_2^{i,1} = 0$ ならば，
$E_2^{i,0} \to E^i \to E_2^{0,i} \to E_2^{i+1,0} \to E^{i+1}$ は完全系列である．
たとえば，$E_2^{1,1} = E_2^{2,1} = 0$ ならば，
$0 \to E_2^{1,0} \to E^1 \to E_2^{0,1} \to E_2^{2,0} \to E^2 \to E_2^{0,2} \to E_2^{3,0} \to E^3$ は完全系

列である．

(3) $1 \leqq p \leqq n,\ 1 \leqq q \leqq n-1,\ p+q \leqq n+1$ を満たす任意の整数 p, q にたいし $E_2^{p,q}=0$ ならば，
$0 \to E_2^{1,0} \to E^1 \to E_2^{0,1} \to E_2^{2,0} \to E^2 \to E_2^{0,2} \to E_2^{3,0} \to E^3 \to \cdots \to E_2^{n-1,0} \to E^{n-1} \to E_2^{0,n-1} \to E_2^{n,0} \to E^n \to E_2^{0,n} \to E_2^{n+1,0} \to E^{n+1}$
は完全系列である．

(4) $0 \leqq p,\ 1 \leqq q \leqq n-1$ を満たす任意の整数 p, q にたいし $E_2^{p,q}=0$ ならば，任意の i に対し $E_2^{i,0} \cong E^i$ が成り立つ．

Ext の議論で登場した 2 重複体 $C^{p,q}=\mathrm{Hom}_R(P_p, I^q)$ では，$p \geqq 1$ または $q \geqq 1$ のとき，P_p の射影性と I^q の単射性から $E_2^{p,q}=0,\ H_1^p(H_2^q(C))=0$ となる．したがって，(4) より，

$$H_1^n(H_2^0(C)) = E_2^{n,0} \cong E^n = H_0^n(C)$$

が得られる．$H_2^0(C)=\mathrm{Hom}_R(P_n, N)$ であるから，これは P_n の射影的分解から定まる右導来関手は $H_0^n(C)$ と同型であることを意味する．同様に，I^n の単射的分解から定まる右導来関手も $H_0^n(C)$ と同型であるから，$\mathrm{Ext}_R^n(M, N)$ は M, N どちらの分解を使っても同じものが得られる．

4.10　おわりに

本章で述べたホモロジー代数学は抽象的であるだけに応用が広く，幾何学における多様体の (コ) ホモロジーはもとより，代数学では，整数論，代数幾何学，群論，リー環論等で威力を発揮する．解析学では，多変数関数論，超関数，$\mathfrak{D}$-加群の理論などに応用される．残念ながら，本書では，群論，リー環論，多変数関数論への応用まで述べることができないが，第 5 章以下の話題だけでも，十分その有用性が理解してもらえると思う．

参考文献

[1] 中山正, 服部昭『ホモロジー代数学』, 現代数学講座, 共立出版, 1957.
[2] 河田敬義『ホモロジー代数 I, II』, 岩波講座基礎数学, 1977.

第 5 章

ケーラー多様体のホッジ理論とスキーム理論

安藤哲哉

5.1 リーマン計量

多様体とよばれるものには，いくつかのカテゴリーがあり，前章までに位相多様体と可微分多様体が登場した．位相多様体としては，立方体の表面も球面も同じ (同相) であり区別できない．しかし，球面とドーナツの表面 (トーラス) は同相でなく，それはホモロジー群 $H_1(X, \mathbb{Z})$ が異なることによっても確認できた．可微分多様体は，位相多様体の上に，微分や積分が行えるような構造のわくぐみを追加したものであった．

我々の住む世界では，長さ・角度・面積・体積・曲率などによって，ものの大きさや形を測ることができる．数学では，長さ・角度・面積・体積・曲率などのことを**計量**という．角度・面積・体積・曲率は，長さから計算できるので，計量の基本は長さ，つまり 2 点間の距離を測ることである．しかし，位相多様体や可微分多様体の中では，2 点間の距離を測る方法がないので，角度・面積・体積なども考えることができない．

2 点間の距離を測る方法を定めた多様体がリーマン多様体である．まず，曲線の長さの求め方から復習しよう．

xyz-空間内に曲面 S があり，S 上に曲線 C があるとする．C が媒介変数

(パラメータ) 表示 $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)\ (a \leqq t \leqq b)$ によって定まるとすれば，C の長さは

$$\int_C ds = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt$$

によって求められる．ここで，$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt$ であり，形式的に，$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ と表すことができる．この ds^2 が長さを計算する手段を提供するので，ds^2 を**リーマン計量**とよぶ.

曲面 S が u, v を媒介変数として，$x = x(u, v),\ y = y(u, v),\ z = z(u, v)$ で定まっていれば，座標 (x, y, z) のかわりに座標 (u, v) を用いて

$$\begin{aligned}
ds^2 &= Edu^2 + 2F du\, dv + G dv^2 \\
E &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 \\
F &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right) + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right) \\
G &= \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2
\end{aligned}$$

と表せる．(u, v) は曲面 (2 次元可微分多様体) S の座標であるが，これは直交座標とは限らないので，計量 ds^2 の形が少し複雑になるのである．S 上での 2 点間の距離は，その 2 点を結ぶ最も短い S 上の曲線 (測地線という) の長さとして定義する．(日常用語でも，東京とニューヨークの距離は，地球を貫通する直線距離ではない．)

一般に，n 次元の各座標 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ の上で，

$$ds^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g_{ij} dx_i dx_j$$

(ただし (g_{ij}) は対称行列で固有値はすべて正の実数) によってリーマン計量 ds^2 が与えられていれば，多様体の中の 2 点間の距離を測ることができる．もちろん，角度・面積・体積・曲率なども測れるようになる．このような多様体

をリーマン多様体という．

アインシュタインの一般相対性理論も，リーマン多様体のような計量が定まった 4 次元多様体の上で展開される．ただし，一般相対性理論では，計量の係数の行列 (g_{ij}) は対称行列であるが，4 個の固有値のうち 3 個は正 (x, y, z 軸に対応する)，残りの 1 つは負 (時間に対応する) である．

5.2 複素多様体とケーラー計量

n 次元位相多様体は $\mathbb{R}^n$ の開集合を連続写像で貼り合わせて作られるもの，n 次元可微分多様体は $\mathbb{R}^n$ の開集合を無限回微分可能な写像で貼り合わせて作られるものであったが，実数 $\mathbb{R}$ のかわりに複素数 $\mathbb{C}$ を用い，$\mathbb{C}^n$ の開集合を正則写像で貼り合わせてできる多様体を n 次元**複素多様体**という．正則とは，複素関数として微分可能なことである．

$\mathbb{R}$ は数直線，$\mathbb{C}$ は複素数平面で表されるから，複素数全体の集合は実数の尺度では 2 次元である．したがって，n 次元複素多様体は，可微分多様体としては $2n$ 次元になる．

複素多様体に計量 ds^2 を定めたものが**ケーラー多様体**である．ただし，複素数の計量は，

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} g_{ij} dz_i d\overline{z}_j$$

(ただし (g_{ij}) はエルミート行列で固有値はすべて正の実数) という形になり，これを**ケーラー計量**とよぶ．記号の意味は，あとで説明する．

n 次元複素多様体 X は $2n$ 次元可微分多様体だから，$0 \leqq i \leqq 2n$ についてホモロジー群 $H_i(X, \mathbb{Z})$ や，ド・ラームコホモロジー群が定義できる．ただし，微分形式の係数として現れる関数の値域は実数ではなく複素数にしないといけないから，ド・ラームコホモロジー群は $H^i(X, \mathbb{C})$ と書く．

複素座標 $(z_1, \cdots, z_n)$ を実座標に直すには $2n$ 個の変数が必要である．このとき，座標に「実」と「虚」の区別が生じるため，複素多様体の微分形式は，これから説明するように，もっと細かい構造を持ち，それがコホモロジー群に反映する．

5.3　複素多様体上の微分形式

複素数は $z = x + \sqrt{-1}y$ (x, y は実数) と表せる．しかし，微分を考えるときには，(x, y) を座標として使うのではなく，z とその共役複素数 $\overline{z} = x - \sqrt{-1}y$ を用いて，$(z, \overline{z})$ 座標を用いるほうがよい．つまり，基本ベクトル $x \leftrightarrow (1, 0)$, $y \leftrightarrow (0, 1)$ の代わりに，$z \leftrightarrow (1, 1)$, $\overline{z} \leftrightarrow (1, -1)$ を座標軸をして使うのである．なぜなら，複素関数 $f(z)$ を実変数関数 $f(z, \overline{z})$ とみなすとき，$\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$ となることが，f が正則関数 (複素微分 $\dfrac{df}{dz}$ が存在する関数) であるための必要十分条件だからである．

同様に，n 次元複素多様体 X 上の微分形式は，$dz_1, dz_2, \cdots, dz_n$ と $d\overline{z}_1, d\overline{z}_2, \cdots, d\overline{z}_n$ を用いて表す．前者の中から p 個，後者の中から q 個を用いて表される微分形式

$$\omega = \sum_{i_1<\cdots<i_p} \sum_{j_1<\cdots<j_q} f_{i_1\cdots i_p j_1\cdots j_q} dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_p} \wedge d\overline{z}_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\overline{z}_{j_q}$$

(ただし，$f_{i_1\cdots i_p j_1\cdots j_q}$ は実変数関数として無限回微分可能な，複素数の値をとる関数) を (p, q)-形式という．これは，可微分多様体としては $(p+q)$-形式になっている．

(p, q)-形式全体の集合を $C^{p,q}(X)$ と書くことにすれば，可微分多様体としての r-形式 (ただし係数の関数の値域は複素数とする) 全体の集合 $C^r(X)$ は，ベクトル空間として $p+q=r$ を満たす $C^{p,q}(X)$ すべての直和

$$C^r(X) = \bigoplus_{p+q=r} C^{p,q}(X)$$

になっている．

また，外微分 d も，z に関する外微分 d' と $\overline{z}$ に関する外微分 d'' に分解でき，

$$d'\omega = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{i_1<\cdots<i_p \\ j_1<\cdots<j_q}} \frac{\partial f_{i_1\cdots i_p j_1\cdots j_q}}{\partial z_k} dz_k \wedge dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_p} \wedge d\overline{z}_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\overline{z}_{j_q}$$

$$d''\omega = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{i_1<\cdots<i_p \\ j_1<\cdots<j_q}} \frac{\partial f_{i_1\cdots i_p j_1\cdots j_q}}{\partial \overline{z}_k} d\overline{z}_k \wedge dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_p} \wedge d\overline{z}_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\overline{z}_{j_q}$$

と定義すれば，$d = d' + d''$ となる．

外微分 d を 2 回行うと $d(d\omega) = 0$ となるように，

$$d'(d'\omega) = 0, \quad d''(d''\omega) = 0$$

が成り立つ．外微分による線形写像を $d^r : C^r(X) \to C^{r+1}(X)$ とするとき，ド・ラームコホモロジーは，

$$H^r(X, \mathbb{C}) = \mathrm{Ker}\, d^r / \mathrm{Im}\, d^{r-1}$$

として定義された．同様に，d', d'' により定まる線形写像

$$d'^{p,q} : C^{p,q}(X) \to C^{p+1,q}(X), \quad d''^{p,q} : C^{p,q}(X) \to C^{p,q+1}(X)$$

を用いて，2 種類のコホモロジー

$$H'^{p,q}(X) = \mathrm{Ker}\, d'^{p,q} / \mathrm{Im}\, d'^{p-1,q}, \quad H''^{p,q}(X) = \mathrm{Ker}\, d''^{p,q} / \mathrm{Im}\, d''^{p,q-1}$$

が定義できる．後者はドルボーコホモロジーとよばれ，解析的に意味のある由緒正しいものである．

5.4 ホッジ理論

X がコンパクトな n 次元ケーラー多様体のとき，上で定義したコホモロジー群 $H'^{p,q}(X)$ と $H''^{p,q}(X)$ は同じもの (同型) であり，しかも，これらは，X 上の調和 (p, q)-形式全体の集合と一致してしまう．そこで，一致するこの 3 つの集合を $H^{p,q}(X)$ と書く．

ここで，**調和** (p, q)-形式とは，(p, q)-形式において，係数の関数 $f_{i_1\cdots i_p j_1\cdots j_q}$ が調和関数であるものをいう．調和関数とは，座標 $z_1, \cdots, z_n$ をケーラー計量について正規直交座標になるように選ぶとき，ラプラシアン $\Delta = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{\partial^2}{\partial z_k \partial \overline{z}_k}$ を作用させたとき，$\Delta f_{i_1\cdots i_p j_1\cdots j_q} = 0$ となる関数である．

特に，$H^{p,0}(X)$ は正則 p-形式全体の集合，$H^0(X) = H^{0,0}(X)$ は X 全体で正則な関数全体の集合になることに注意しておこう．

さらに，以下の等式が成立する．

$$H^r(X, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=r} H^{p,q}(X)$$

$$\dim H^{q,p}(X) = \dim H^{p,q}(X) = \dim H^{n-p,n-q}(X) = \dim H^{n-q,n-p}(X)$$

この公式により，ケーラー多様体のコホモロジー群は，可微分多様体のコホモロジーより多様体について詳しい情報を与えてくれる．

ホッジ理論とは，もともとは，ケーラー多様体に関する上の 2 つの等式と，それに関連するいろいろな性質のことを指していたが，これと類似な構造が他のところでも見つかったため，この構造を抽象化して代数的に研究することが最近のホッジ理論の主なテーマになっている．

参考までに，100 万ドルの懸賞金がかけれらた「ホッジ予想」という問題があるが，それは次のような問題である．

位相多様体のホモロジー群を定義するとき，単体・胞体・複体などというものを利用した．それらは，r 次元の部分多様体に係数を付けて和をとったものと考えることができ，これを r-サイクルともよぶ．代数多様体においては，この部分多様体がすべて s 次元の代数多様体として選べるとき，このサイクルを代数的 s-サイクルという $(r = 2s)$．r-サイクルは $H^{2n-r}(X, \mathbb{C})$ の元と考えることができる．特に，代数的 $(n-s)$-サイクルは $H^{s,s}(X) \subset H^{2s}(X, \mathbb{C})$ に属する．逆に，$H^{s,s}(X) \cap H^{2s}(X, \mathbb{Q})$ の元は，すべて代数的サイクルによって表すことができる，という予想がホッジ予想である．

5.5　複素代数多様体

ケーラー多様体の最も大切な例は，非特異代数多様体である．代数多様体とは，雑に言えば，多項式で定義される多様体のことである．以下，**代数曲線** (1 次元代数多様体) から順に説明していく．

円，楕円，双曲線，放物線は，2 次曲線とよばれ，代数曲線の最も簡単な例である．

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ は，$x'=\dfrac{x}{a}$, $y'=\dfrac{y}{b}$ という変数変換をすれば，円 $x'^2+y'^2=1$ になるから，楕円と円は代数多様体としては同じもの (同型) である．

双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ は，実数の世界では (つまり $\mathbb{R}^2$ 上の曲線としては)，円や楕円とは同型でないが，複素数の世界で (つまり $\mathbb{C}^2$ 上の曲線として) 考えれば，$x'=\dfrac{x}{a}$, $y'=\sqrt{-1}\dfrac{y}{b}$ という変数変換によって円 $x'^2+y'^2=1$ になるから，双曲線と円は複素代数多様体として同型である．

放物線 $y=x^2$ は複素代数多様体としても円とは同型でないが，次のような「射影化」という操作を行うと円と同型になる．

連比 $(X:Y:Z)$ (X, Y, Z は複素数で，少なくとも 1 つは 0 でない) 全体の集合を $\mathbb{P}^2$ と書き，これを点 $(X:Y:Z)$ の集合と考え**射影平面**という．$(2:4:6)=(1:2:3)$ のように，比として等しい連比は同じ点を表すものとする．複素 xy-平面 $\mathbb{C}^2$ の点 (x, y) は連比 $(x:y:1)$ と同じ点を表すと考え，$\mathbb{C}^2\subset\mathbb{P}^2$ とみなす．逆に，$\mathbb{P}^2$ の点 $(X:Y:Z)$ は $Z\neq 0$ であれば，$\mathbb{C}^2$ の点 $\left(\dfrac{X}{Z}, \dfrac{Y}{Z}\right)$ と同じ点である．$\mathbb{C}^2$ に属さない $\mathbb{P}^2$ の点は $(X:Y:0)$ という形の点であるが，このような点を**無限遠点**という．

$\mathbb{C}^2$ 内で d 次式 $f(x, y)=0$ で定まる d 次曲線 C は，$x=\dfrac{X}{Z}$, $y=\dfrac{Y}{Z}$ とおくことにより，$\mathbb{P}^2$ 内の曲線とみなせる．つまり，d 次の斉次多項式 $Z^d f\left(\dfrac{X}{Z}, \dfrac{Y}{Z}\right)=0$ で定まる集合 $\overline{C}$ に対応する．このとき，$\overline{C}$ は C に何個かの無限遠点を付け加えたものになる．この $\overline{C}$ を C の射影化という．

たとえば，円 $x^2+y^2=1$ の射影化は $X^2+Y^2=Z^2$ で，これは円に 2 個の無限遠点 $(1:\sqrt{-1}:0)$ と $(1:-\sqrt{-1}:0)$ を付け加えたものである．他方，放物線 $y=x^2$ の射影化は $YZ=X^2$ であり，これは放物線に 1 個の無限遠点 $(0:1:0)$ を付け加えたものである．

射影化された放物線 $YZ=X^2$ は，$Y=X'+\sqrt{-1}Y'$, $Z=X'-\sqrt{-1}Y'$, $X=Z'$ と変数変換すれば，射影化された円 $X'^2+Y'^2=Z'^2$ になるので，射影化された放物線と円は同型である．

もとの放物線と円は，この同型なものから，それぞれ，1 点，2 点の無限遠

点を取り除いたものだから，同型ではないことがわかる．

ところで，放物線 $y = x^2$ と直線 (座標を t とする) は，$t \to (t, t^2)$, $(x, y) \to x$ という対応により同型である．したがって，複素化し射影化すれば，直線，円，楕円，双曲線，放物線はすべて同型になってしまう．しかし，$x^3 + y^3 = 1$ のような 3 次曲線は，これらと同型ではない．

このように，複素化と射影化の操作をすることにより，代数曲線は明解に理解できるようになるが，もっと大切なことは，それが (特異点を持たなければ) コンパクトな 1 次元ケーラー多様体になることである．計量は，$\mathbb{P}^2$ の計量から自然に定まる．

$\mathbb{C}^N$ 内で何個かの多項式 $f_i(x_1, \cdots, x_n)$ で定義された集合 (アフィン代数多様体) も，上と同じように，N 次元複素射影空間 $\mathbb{P}^N$ 内で射影化することができ，これを**射影代数多様体**という．(厳密にいうと，それが，2 つ以上の多様体に分割できたり，重複があったりするときは代数多様体とはよばず，代数的集合とよぶ.) 射影代数多様体は，(特異点がなければ) コンパクトなケーラー多様体になる．

特異点とは，円錐の頂点などのように，滑らかでない点のことであるが，特異点は，それだけで 1 冊の本が書けるほど，複雑で豊富な話題を提供するので，本稿では，特異点の話題まで詳しく述べる余裕はない．

5.6　座標環

$\mathbb{C}^2$ 内で多項式 $f(x, y) = 0$ で定義された代数曲線 C と，環 $R = \mathbb{C}[X, Y]/(f)$ は切っても切り離せない関係にある．R は複素数係数 2 変数多項式環 $\mathbb{C}[X, Y]$ を，多項式 $f(X, Y)$ で生成されるイデアル (f) で割って得られる環である．ここで，イデアル (f) は，$f(X, Y)$ の倍数全体の集合である．

多項式 $f(X, Y)$ が既約なとき，つまりこれ以上因数分解できないとき，$gh \in (f)$ ならば gh は f の倍数だから，g か h の少なくとも一方は f の倍数になる．一般にこのような性質「$gh \in I$ ならば $g \in I$ または $h \in I$」を満たすイデアル I を**素イデアル**という．

$R = \mathbb{Z}$ の場合，イデアルは $I = (n)$ と書けるが，これは n が素数か 0 の

場合に限って素イデアルになる．これが，素イデアルの語源である．

環 $\mathbb{C}[X, Y]$ の素イデアルは，(f) ($f(X, Y)$ は既約多項式) と (0) 以外に，$(X-a, Y-b)$ という形のものがある．これ以外に素イデアルはない．ところで，$\mathbb{C}[X, Y]/(X-a, Y-b) \cong \mathbb{C}$ であり，$\mathbb{C}[X, Y] \supsetneqq I \supsetneqq (X-a, X-b)$ を満たすイデアル I は存在しない．このような性質を持つイデアルを**極大イデアル**という．極大イデアルは常に素イデアルである．

環 $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ では，$[2]\cdot[3]=[0]$ であり，ゼロでない 2 つの元の積がゼロになることがある．このような元を**ゼロ因子**という．因子は英語で divisor といい，ゼロ因子はゼロの約数という意味である．

一般に I が環 R の素イデアルであれば，R/I は 0 以外のゼロ因子を持たず，逆も正しい．0 以外にゼロ因子を持たない環は**整域**とよばれる．f が既約多項式のとき $\mathbb{C}[X, Y]/(f)$ は体でない整域になる．ちなみに，$\mathbb{C}[X, Y]/(0) = \mathbb{C}[X, Y]$ である．

整域 $R=\mathbb{C}[X, Y]/(f)$ の (0) 以外の素イデアルは，$(X-a, Y-b)$ (ただし，$f(a, b)=0$) という形のものであって，これは R の極大イデアルである．したがって，R の極大イデアル $(X-a, Y-b)$ と曲線 C 上の点 (a, b) が 1 対 1 に対応する．$R=\mathbb{C}[X, Y]/(f)$ の元は $g(X, Y) \in \mathbb{C}[X, Y]$ の f を法とした同値類である．つまり，$g_1(X, Y)-g_2(X, Y)$ が $f(X, Y)$ の倍数のとき，$g_1=g_2$ とみなしたものである．したがって，C 上の点 (a, b) に対してのみ値 $g(a, b)$ が定まる．つまり，R の元は曲線 C 上の代数的な正則関数である．このように，R は C 上の代数的関数全体の集合とも考えられる．この $R=\mathbb{C}[X, Y]/(f)$ を C の**座標環**という．

一般に，$\mathbb{C}^N$ 内で何個かの多項式 $f_i(x_1, \cdots, x_n)$ $(i=1, 2, \cdots, r)$ で定義された集合 X に対しても，

$$R=\mathbb{C}[X_1, X_2, \cdots, X_n]/(f_1, f_2, \cdots, f_r)$$

を X の座標環という．R が整域になるとき，X を**アフィン代数多様体**というのである．この場合も，R の極大イデアルと X の点が 1 対 1 に対応し，R の素イデアルと X の部分代数多様体が 1 対 1 に対応する．また，

$$Q(R)=\left\{\frac{a}{b} \,\middle|\, a, b \in R, b \neq 0\right\}$$

は R を含む最小の体であるが，$Q(R)$ の元は X 上の**有理関数** (分母と分子が多項式である関数) である．$Q(R)$ を X の**有理関数体**という．

ところで，$\mathbb{C}[X, Y]$ においては，素イデアルの列 $(0) \subsetneqq (f) \subsetneqq (X-a, Y-b)$ (f は既約多項式で $f(a, b)=0$) より長い列は存在しない．一般に，環 R において素イデアルの列 $I_0 \subsetneqq I_1 \subsetneqq I_2 \subsetneqq \cdots \subsetneqq I_n \subsetneqq R$ の長さ n の最大値 (最大値がなければ $+\infty$) を R の**クルル次元**といい，$\mathrm{Krull}\dim R$ とか $\dim R$ と書く．n 次元のアフィン代数多様体の座標環のクルル次元は n である．

このように，代数多様体の諸概念は，環や体の言葉に直していくことができる．これが，後で説明するスキームの考え方につながっていく．

5.7　局所環

R は n 次元複素アフィン代数多様体 X の座標環とする．X の点 p に対応する R の極大イデアルを $\mathfrak{m}$ とするとき，

$$R_{\mathfrak{m}} = \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; a, b \in R, b \notin \mathfrak{m} \right\} \subset Q(R)$$

は環になる．$R_{\mathfrak{m}}$ には極大イデアルは $\mathfrak{m}R_{\mathfrak{m}}$ ただ 1 つしか存在しない．このように，極大イデアルをただ 1 つだけ持つ環を**局所環**という．$R_{\mathfrak{m}} \subset Q(R)$ だから，$R_{\mathfrak{m}}$ の元 f は X 上の有理関数であるが，点 p では $f(p) \in \mathbb{C}$ である．したがって，p の十分小さい近傍上では f は正則関数になる．このような f を点 p における**正則関数の芽**という．つまり，$R_{\mathfrak{m}}$ は点 p における正則関数の芽全体のなす環である．

この局所環 $R_{\mathfrak{m}}$ は点 p における X の様子を反映する．たとえば，p が X の特異点でないとき，点 p の近傍での局所座標系を $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ とするとき，極大イデアル $\mathfrak{m}R_{\mathfrak{m}}$ は $x_1, x_2, \cdots, x_n$ で生成されるイデアルで，局所環 $R_{\mathfrak{m}}$ の完備化は $x_1, x_2, \cdots, x_n$ を変数とする複素数係数冪 (べき) 級数

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{i_n=0}^{\infty} a_{i_1 i_2 \cdots i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n}$$

全体のなす環 $\mathbb{C}[[x_1, x_2, \cdots, x_n]]$ (これを n **変数形式的冪級数環**という) と同

型になる．このような環 $R_{\mathfrak{m}}$ を**正則局所環**という．

逆に，$R_{\mathfrak{m}}$ が正則局所環であるとき，p は X の特異点でない．

第 4 章で述べた $R_{\mathfrak{m}}$ の大域次元が $R_{\mathfrak{m}}$ のクルル次元 n に一致することが，$R_{\mathfrak{m}}$ が正則局所環であるための必要十分条件である．

p が X の特異点であるとき，$R_{\mathfrak{m}}$ は正則局所環でないが，特異点 p の性質を $R_{\mathfrak{m}}$ の言葉で記述することが多い．本書では定義も述べられないが，たとえば，$R_{\mathfrak{m}}$ がゴレンシュタイン環，コーエン・マコーレイ環であるとき，特異点 p をそれぞれ，ゴレンシュタイン特異点，コーエン・マコーレイ特異点という．実は，これらは第 4 章で説明した導来関手 Ext を利用して，その性質をいろいろ記述することができるのである．

5.8 層

特異点を持たない複素射影代数多様体 X は，コンパクトなケーラー多様体だから，コホモロジー群 $H^{p,q}(X)$ が定義できる．$H^{p,q}(X)$ は X 上の調和 (p, q)-形式の情報を与えてくれるが，実は，それより，もっと豊富な情報を与えてくれるコホモロジーを構成することができる．

複素関数論を学ぶと，複素関数は，極と零点の情報によってほとんど決定できることを習う．たとえば，関数 $y = \dfrac{x^2}{(x-1)^3}$ は，$x = 0$ を 2 位の零点，$x = 1$ を 3 位の極として持つ．無限遠点 $x = \infty$ は，$t = 1/x$ とおけば $t = 0$ になり，$y = \dfrac{t}{(1-t)^3}$ となるから，無限遠点は 1 位の零点である．逆に，この様な極と零点を持つ関数は，$y = c\dfrac{x^2}{(x-1)^3}$ (c は 0 でない定数) 以外に存在しない．

$\mathbb{C} \subset \mathbb{P}^1$ と考えたとき，$\mathbb{C}$ 全体で正則で無限遠点に極を持つ関数は，多項式しかない．また，$\mathbb{P}^1$ 全体で正則な関数は，定数関数しかない．

$H^0(X, \mathbb{C})$ は X 全体で正則な関数の集合だから，それは定数関数しかなく，$H^0(X, \mathbb{C}) = \mathbb{C}$ となってしまう．そこで，$H^0(X, \mathbb{C})$ の $\mathbb{C}$ の代わりに何かうまい $\mathfrak{F}$ を考え，$H^0(X, \mathfrak{F})$ が与えられた極や零点を持つ関数全体の集合を表すようにすれば，X 上のいろいろな関数を決定することができる．また，$\mathfrak{F}$ を

工夫すれば，複素数値関数以外にも，ベクトル値関数や，ベクトル値微分形式等が $H^0(X, \mathfrak{F})$ として現れるようにできるのである．そんな，有難いコホモロジーが，層係数コホモロジーとよばれるもので，$\mathfrak{F}$ として層を使うのである．

層は岡潔とルレイにより考案された．残念ながら，層の定義は難解で極度に抽象的であり，ここで述べるには無理がある．ここでは，簡単な層の例を示すことで，層を理解したことにしよう．(第 7 章に，もう少し詳しい説明がある.)

X を特異点を持たない複素射影曲線とする．複素関数論では，X はコンパクトリーマン面ともよばれる．m を自然数，P を X 内の定点とし，X の開集合 U に対し，点 P 以外の U の各点で正則で，点 P では高々 m 位の極しか持たないような関数全体の集合を $\mathfrak{F}(U)$ とする．このように，X の開集合 U に対し，$\mathfrak{F}(U)$ を対応させる規則 $\mathfrak{F}$ のことを**層**という．(もちろん，この規則が，いくつかの定められた法則を満たすことが層の定義では要求されている.) いま構成した層 $\mathfrak{F}$ は $\mathfrak{O}_X(mP)$ という記号で書かれ，曲線論で大切な層である．

$\mathfrak{F}(U)$ を U 全体で正則な関数全体の集合として定めた層 $\mathfrak{F}$ は，$\mathfrak{O}_X$ と書かれ，X の**構造層**とよばれる．同様に，$\mathfrak{F}(U)$ を U 上の連続関数全体とか，無限回微分可能な関数全体として定めた層 $\mathfrak{F}$ が，それぞれ，位相多様体，可微分多様体の構造層である．

ところで，U を大きくすると，U 上の正則関数は減って行く．これが，$H^0(X, \mathfrak{F})$ を求めるために $\mathfrak{F}(U)$ を経由しなければならない由縁である．

点 $p \in X$ を固定し，p を含む U をどんどん小さくしていったときの $\mathfrak{F}(U)$ の極限を $\mathfrak{F}_p$ と書き，点 p における $\mathfrak{F}$ の**ストーク** (茎) という．数学的にきちんと言うと，p の開近傍全体の集合に $U \subset U'$ のとき $U \geqq U'$ として順序を定めたときの帰納的極限

$$\mathfrak{F}_p = \varinjlim_{U} \mathfrak{F}(U)$$

である．たとえば，$\mathfrak{F} = \mathfrak{O}_X$ のとき，$\mathfrak{O}_{X,p}$ は点 p における正則関数の芽全体のなす集合で，これは局所環になる．

層係数コホモロジーは，$H^0(U, \mathfrak{F}) = \mathfrak{F}(U)$ となるように，巧妙な方法で定義されるが，それを以下に説明する．

5.9 層係数コホモロジー

代数幾何学に層係数コホモロジーを導入したのは，セールである．

第 4 章で説明したように，完全系列 $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ に，共変関手 F をほどこしたとき，$0 \to F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C)$ は完全であるが，最後の $\to 0$ が欠落してしまうとき，その欠落を補うように右導来関手 $\mathbf{R}^i F$ が存在して，完全系列

$$0 \to F(A) \to F(B) \to F(C) \to \mathbf{R}^1 F(A) \to \mathbf{R}^1 F(B) \to \mathbf{R}^1 F(C) \\ \to \mathbf{R}^2 F(A) \to \mathbf{R}^2 F(B) \to \mathbf{R}^2 F(C) \to \cdots$$

が存在する．(ただし，$\mathbf{R}^0 F(A) = F(A)$ 等とする．)

これは，極端に抽象化されたホモロジー代数の偉大な結果である．具体的には，$\mathbf{R}^i F(A)$ は A の単射的分解というものを利用して構成されるが，この単射的分解は，実体としてはほとんど解釈不能で，得体の知れないものである．しかし，その結果得られる $\mathbf{R}^i F(A)$ は，たいていの場合，具体的な意味を持つものが現れる．

層係数コホモロジーは，この導来関手によって定義される．X 上の層 $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ に対し，完全系列 $0 \to \mathcal{A} \to \mathcal{B} \to \mathcal{C} \to 0$ は，X の各点 p にたいしてストークの系列 $0 \to \mathcal{A}_p \to \mathcal{B}_p \to \mathcal{C}_p \to 0$ が加群の完全系列になることとして定義される．このとき，$0 \to \mathcal{A}(X) \to \mathcal{B}(X) \to \mathcal{C}(X)$ は完全であるが，最後の $\to 0$ が欠落してしまう．$F(\mathcal{A}) = \mathcal{A}(X)$ として関手 F を定めれば，上に述べたように，右導来関手 $\mathbf{R}^i F(\mathcal{A})$ が構成できる．そこで，

$$H^i(X, \mathcal{A}) = \mathbf{R}^i F(\mathcal{A})$$

として，層係数コホモロジー $H^i(X, \mathcal{A})$ を定義する．

ところで，ホモロジー代数の教えるところによれば，コホモロジーというものは，どんな方法で構成したにせよ，ある一定の条件を満たせば，異なる方法で定義されたコホモロジーは一致してしまう．X がコンパクトなケーラー多様体の場合にも，

$$H^q(X, \mathcal{O}_X) = H^{0,q}(X)$$

$$H^q(X, \Omega_X^p) = H^{p,q}(X)$$

が成立する．ここで，Ω_X^p は正則 $(p, 0)$-形式の層で，X の開集合 U に対し，$\Omega_X^p(U)$ は，係数の関数が U 上で正則な U 上の $(p, 0)$-形式全体の集合であるとして定義される層である．

5.10　スキーム

層係数コホモロジーは，微分形式を使わないので，代数多様体 X が特異点を持つ場合でも定義できる．また，U 上の正則関数というのは，U 上で分母が 0 にならないような有理関数と理解できるので，複素代数多様体でなくても，一般の体上で定義された代数多様体でもコホモロジーが定義できる．つまり，有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の多様体とか，p 進数体 $\mathbb{Q}_p$，あるいは有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の代数多様体にもコホモロジーが定義できるのである．このような体は数論で重要である．

グロタンディークは，代数多様体の概念を可換環論を用いて一般化し，スキームというものを考案した．このスキームは，層係数コホモロジーの理論とよく調和していて，それまで代数多様体という狭いカテゴリーの中だけでは証明できなかったいろいろな定理が，スキームという広いカテゴリーを利用することによって，見事に証明できる．

スキームの定義は，層の定義以上に抽象的で難解であるが，以下，多少厳密性を犠牲にして，そのアウトラインを述べる．

たとえば，$\mathbb{C}^2$ 内で $f(x, y) = 0$ によって定義される代数曲線 X を考える．集合としては，$(f(x, y))^k = 0$ で定義される集合 X' と X は区別がつかない．X の座標環 $R = \mathbb{C}[x, y]/(f)$ まで考察すると，これは X' の座標環 $R' = \mathbb{C}[x, y]/(f^k)$ とは同型でないので区別がつく．X 上の点と R の極大イデアルは 1 対 1 に対応しているから，座標環 R から曲線 X を復元することができる．したがって，X より R のほうが多くの情報を含んでいる．

R の極大イデアルだけでなく素イデアルまで含めて考えると，理論が美しく構成できる．R の素イデアル全体の集合を $\operatorname{Spec} R$ と書き，ここにザリスキー位相とよばれる位相を定める．$\operatorname{Spec} R$ を X の代用物して用いるのである．さらに，$\operatorname{Spec} R$ の開集合に対し R の局所環を利用して構造層を定義す

る．この Spec R はアフィンスキームとよばれるが，アフィンスキームを開集合として貼り合わせたものがスキームである．

アフィンスキームは任意の可換環に対し定義でき，さらに，R-加群 M があると，M から層 $\widetilde{M}$ を構成することができる．これによって，可換環と加群が，スキームと層として，幾何学的な考察対称になるのである．

スキーム X とその上の層 $\mathfrak{F}$ に対しては，導来関手を用いてコホモロジー $H^i(X, \mathfrak{F})$ が定義できる．それには，幾何も解析も必要でなく，純粋に代数だけがあればよい．グロタンディークはフェルマーの大定理を証明するためにスキームを考案したと言っている．グロタンディーク自身はフェルマーの大定理を証明できなかったが，後のワイルズとテーラーの証明では，当然のように，スキームとコホモロジーが使われている．ただし，第 6 章で説明するように，そこでは，もっと別の種類のコホモロジーが活躍する．

5.11 コホモロジーの基本公式

層係数コホモロジーの定義は完了したが，微分 $f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ も，この定義だけ聞いても有難味はない．具体的な関数の微分の計算方法や，その応用を知って，はじめて微分の有用性がわかる．

コホモロジーは定義が難しいので，ここまでにずいぶん紙面を費やしてしまったが，コホモロジーの計算方法は，以外と簡単で，難易度としては微分の計算と大差ない．計算方法が簡単だといっても，それは，まだ説明していない種々の公式や消滅定理を使えば，というただし書きがつく．

まず，微分の $(e^x)' = e^x$ や $(\sin x)' = \cos x$ に相当するコホモロジーの公式は，射影空間 $\mathbb{P}^n$ のコホモロジーの計算である．$\mathbb{P}^n$ の斉次座標を $(X_0 : X_1 : \cdots : X_n)$ とし，$X_0 = 0$ で定まる集合 (これを $\mathbb{P}^n$ の**超平面**といい，$\mathbb{P}^{n-1}$ と同型になる) を H とする．以前 $\mathfrak{O}_{\mathbb{P}^n}(mP)$ を作ったように，H に沿って高々 m 位の極を持ち，それ以外で正則な関数全体から作られる層を $\mathfrak{O}_{\mathbb{P}^n}(mH)$ と書く．$m < 0$ のときは，H に沿って $-m$ 位以上の零点を持つ正則関数全体から作られる層として解釈する．このとき，

$1 \leqq i \leqq n-1$ ならば，任意の整数 m に対し $H^i(\mathbb{P}^n,\ \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(mH)) = 0$

$m < 0$ ならば $H^0(\mathbb{P}^n,\ \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(mH)) = 0$

$m \geqq 0$ ならば $\dim H^0(\mathbb{P}^n,\ \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(mH)) = \dfrac{(m+n)!}{m!n!}$

$H^n(\mathbb{P}^n,\ \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(mH)) \cong H^0(\mathbb{P}^n,\ \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-(n+1+m)H))$

が成り立つ．

せっかく苦労して定義したコホモロジーがほとんどの場合 0 になってしまうのは，情けないように見えるが，後でわかるように，$i \geqq 1$ のとき $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ となることは大変有難いことなのである．

次に $\mathbb{P}^n$ の中で，1 つの d 次斉次多項式により $f(X_0, X_1, \cdots, X_n) = 0$ で定義される d 次超曲面 X のコホモロジーを計算してみよう．ここでは，次の 2 つの公式が重要になる．

$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(X) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(dH)$

$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(mH - X) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(mH) \to \mathcal{O}_X(mH) \to 0$ は完全系列である．

この 2 つの公式から，次の完全系列が作られる．これは，導来関手の性質による．

$$\begin{aligned}
0 &\to H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}((m-d)H)) \to H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(mH)) \to H^0(X, \mathcal{O}_X(mH)) \\
&\to H^1(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}((m-d)H)) \to H^1(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(mH)) \to H^1(X, \mathcal{O}_X(mH)) \\
&\to H^2(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}((m-d)H)) \to H^2(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(mH)) \to H^2(X, \mathcal{O}_X(mH)) \\
&\to H^3(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}((m-d)H)) \to \cdots \\
&\cdots \to H^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}((m-d)H)) \to H^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(mH)) \to 0
\end{aligned}$$

何だか難しそうに見えるが，ここからの計算は，ものすごく単純である．ただし，ちょっとした矢印数学に関する計算知識が必要である．微分で言うと $(fg)' = f'g + fg'$ 等に相当する一般公式である．

一般に $\cdots \to A \to B \to C \to D \to E \to \cdots$ という完全系列があるとする．

(1) もし $A = C = 0$ であれば，$B = 0$ である．

(2) もし $A = D = 0$ であれば，$B \cong C$ である．($B = C$ と考えてもよい．)

(3) もし $A = E = 0$ であれば，$\dim C = \dim B + \dim D$ である．

(4) もし $A = 0$ であれば，$B \to C$ は単射である．

(5) もし $C=0$ であれば，$A \to B$ は全射である．

以上の計算規則を使うと，$1 \leqq i < \dim X$ のとき，$H^i(X, \mathcal{O}_X(mH)) = 0$ 等がすぐにわかる．

コホモロジーの計算では，このように完全系列を構成して，すでに値がわかっているコホモロジーから，未知のコホモロジーを計算する，という手法がよく用いられる．特に，$H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ となるコホモロジーを見つけることが大変有用になる．

5.12 因子

上で $\mathcal{O}_X(mP)$ とか $\mathcal{O}_X(mH)$ という層が登場したが，これらは X 上の有理関数 (極を除いて正則な関数) を調べるために大切であった．

1 変数の有理関数の極や零点は点であったが，n 変数の代数的な有理関数 $f(x_1, \cdots, x_n)$ の極や零点は $n-1$ 次元の代数多様体になる．f が $n-1$ 次元代数多様体 Y を m 位の零点にもつとき $\mathrm{ord}_Y f = m$, Y を m 位の極にもつとき $\mathrm{ord}_Y f = -m$ と書くことにし，$\mathrm{div}(f) = \sum_Y (\mathrm{ord}_Y f) Y$ とすれば，有理関数は極と零点の位数だけで定数倍を除いて一意的に決定できるから，$\mathrm{div}(f)$ は f を決めるのに十分な情報を持つ．

この $\mathrm{div}(f)$ のように，n 次元代数多様体 X に対し，その $n-1$ 次元部分代数多様体 $Y_1, \cdots, Y_m$ に整数係数 $a_1, \cdots, a_m$ をつけて和をとったもの

$$D = a_1 Y_1 + a_2 Y_2 + \cdots + a_m Y_m$$

を**因子**という．2 つの因子は，足したり，引いたりできる．また，$a_1 \geqq 0, \cdots, a_m \geqq 0$ のとき，$D \geqq 0$ と書く．

因子 D に対し，$\mathrm{div}(f) + D \geqq 0$ を満たすような有理関数 f 全体によって定まる層を $\mathcal{O}_X(D)$ と書く．これは，$\mathcal{O}_X(mP)$ とか $\mathcal{O}_X(mH)$ の一般化である．

ところで，正則 n-形式の層 Ω_X^n に対し，$\Omega_X^n \cong \mathcal{O}_X(K_X)$ を満たす因子 K_X が存在する．この因子 K_X は微分形式 $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ から定まるものである．K_X を**標準因子**という．

$X = \mathbb{P}^n$ の場合には，H を $\mathbb{P}^n$ の超平面として，$K_X = -(n+1)H$ であ

る．Y が X の $n-1$ 次元部分代数多様体のとき $K_Y = (K_X + Y)|_Y$ が成り立つから，Y が $\mathbb{P}^n$ の d 次超曲面ならば $K_Y = (d-n-1)H|_Y$ となる．したがって，$d < n+1$ ならば $K_Y < 0$, $d = n+1$ ならば $K_Y = 0$, $d > n+1$ ならば $K_Y > 0$ である．

たとえば，$\mathbb{P}^2$ の 3 次曲線，$\mathbb{P}^3$ の 4 次曲面，$\mathbb{P}^4$ の 5 次曲面等では $K_Y = 0$ となるが，これらは各々，楕円曲線，K3 曲面，Calabi-Yau 多様体とよばれるものであり，応用の多い興味ある多様体である．

5.13　リーマン・ロッホの定理

$i \geqq 1$ のとき $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ となると有難い理由の 1 つに，リーマン・ロッホの定理がある．

たとえば $H^0(X, \mathcal{O}_X(mH)) = 0$ は H に沿って高々 m 位の極を持ち，それ以外の X の各点で正則な関数全体の集合である．このような集合の次元を求めることは，関数を決定するためには大切である．

他方，$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \dim H^i(X, \mathcal{F})$ は $\mathcal{F}$ の**オイラー数**とよばれ，$\chi(X, \mathcal{F})$ と書かれるが, このオイラー数は, リーマン・ロッホの定理を用いて計算することができる．

もし，$i \geqq 1$ のとき $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ であれば，$\dim H^0(X, \mathcal{F}) = \chi(X, \mathcal{F})$ となるので，関数空間の次元が決定できることになる．

リーマン・ロッホの定理の一般形は，チャーン類とトッド類とよばれるものを使って書かれるが，ここでは，そこまで解説する余裕がないので，曲線のリーマン・ロッホの定理の簡単なものを紹介しよう．

X が特異点を持たない射影曲線であるとする．曲線 X 上の因子 $D = \sum_{i=1}^{r} a_i P_i$ (P_i は X 上の点で，a_i は整数) に対し，次数を $\deg D = \sum_{i=1}^{r} a_i$ で定める．

たとえば，$D = mP$ のとき，$\deg D = m$ で，$\mathcal{O}_X(mP)$ はすでに説明したように，P に高々 m 位の極を持つ関数がなす層である．このとき，

$$\chi(X, \mathcal{O}_X(D)) = \deg D + 1 - g(X)$$

が成り立つ．ここで，

$$g(X) = \dim H^1(X,\ \mathcal{O}_X) = \dim H^0(X,\ \mathcal{O}_X(K_X))$$

で，曲線 X の**種数**とよばれる．たとえば X が $\mathbb{P}^2$ 内の d 次曲線だと，$g(X) = \dfrac{(d-1)(d-2)}{2}$ となる．

X が 3 次曲線の場合，$g(X) = 1$ だから，$\chi(X, \mathcal{O}_X(mP)) = m$ となる．さらに，$m \geqq 1$ のとき，$H^1(X, \mathcal{O}_X(mP)) = 0$ となるから，

$$\dim H^0(X,\ \mathcal{O}_X(mP)) = m$$

が得られる．ただし，$m = 0$ の場合，$\dim H^0(X, \mathcal{O}_X) = \dim H^1(X, \mathcal{O}_X) = 1$ である．集合として，$H^0(X, \mathcal{O}_X((m-1)P)) \subset H^0(X, \mathcal{O}_X(mP))$ だから，点 P のみにちょうど m 位の極を持つ関数が存在するためには，

$$\dim H^0(X,\ \mathcal{O}_X((m-1)P)) < \dim H^0(X,\ \mathcal{O}_X(mP))$$

であることが必要十分である．$\dim H^0(X, \mathcal{O}_X) = \dim H^0(X, \mathcal{O}_X(P))$ だから，点 P のみにちょうど 1 位の極を持つ関数は存在しないことがわかる．点 P のみにちょうど 2 位の極を持つ関数は存在して，それはワイエルシュトラスの $\wp$-関数 (ペー関数) とよばれる大切な関数 (の定数倍) である．点 P のみにちょうど 3 位の極を持つ関数は $\wp$-関数の導関数の定数倍のみである．

このように，コホモロジーの計算は，多様体上の関数について重要な情報を与える．

5.14 アンプル因子

因子 D には，他にも大切な役割がある．ベクトル空間 $H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$ の基底を $f_0, f_1, \cdots, f_m$ とする．f_i は有理関数なので，すべての f_i が同時に 0 になるような点を除けば，X の点 P に対して，射影空間 $\mathbb{P}^m$ の点 $(f_0(P) : f_1(P) : \cdots : f_m(P))$ を対応させることができる．このように，X のほとんどの点から $\mathbb{P}^m$ への写像を Φ_D などと書き，因子 D が定める**有理写像**という．

Φ_D が定義できない点全体の集合を D の固定点といい $\mathrm{Bs}\,|D|$ と書く．

$\mathrm{Bs}\,|D| = \phi$ で，$\varPhi_D$ が $\mathbb{P}^n$ の中への同型写像になるとき D は**非常に豊富** (very ample) であるという．また，自然数 k を十分大きくとれば kD が非常に豊富になるとき，D は**アンプル** (豊富) であるという．

たとえば，種数 $g(X) = 1$ の曲線では，$\dim H^0(X, \mathcal{O}_X(3P)) = 3$ で，$\mathrm{Bs}\,|3P| = \phi$ かつ $\varPhi_{3P}\colon X \to \mathbb{P}^2$ は中への同型写像だから，$3P$ は非常に豊富な因子である．しかも，像 $\varPhi_{3P}(X)$ は $\mathbb{P}^2$ 内の 3 次曲線になる．つまり，種数 1 の曲線は $\mathbb{P}^2$ 内の 3 次曲線と同型である．

このように，因子 D から作られる有理写像 $\varPhi_D$ は，代数多様体の構造を知る上で，たいへん役に立つ．

5.15　消滅定理

$i \geqq 1$ のとき $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ となることは，有り難いことであると，前に述べた．ある条件下に $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ となる，という定理を**消滅定理**という．

以下，主な消滅定理を列挙する．

1. $X = \mathrm{Spec}\, R$ がアフィンスキームのとき，R-加群 M から作られる層 $\mathcal{F} = \widetilde{M}$ (これを準連接層という) について，$i \geqq 1$ のとき $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ である．
2. (セールの消滅定理) X がスキーム，$\mathcal{L}$ がアンプル可逆層ならば，任意の連接層 $\mathcal{F}$ に対し，ある整数 m_0 が存在して，$m \geqq m_0$ ならば，$i \geqq 1$ のとき $H^i(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^m) = 0$ である．
3. (小平の消滅定理) X が n 次元複素代数多様体のとき，D がアンプル因子ならば，$i \geqq 1$ のとき，
$H^i(X, \mathcal{O}_X(K_X + D)) = 0$ である．

1. と 2. の消滅定理は，どんな体上の代数多様体でも成立するが，小平の消滅定理は，正標数の体では成立しない．これ以外に，川又-フィーベックの消滅定理，ラマヌジャンの消滅定理などは実用上有用であるが，仮定が複雑なので，ここでは割愛させていただく．

5.16 スペクトル系列

スペクトル系列 $E_2^{p,q} \Longrightarrow E^{p+q}$ の定義は，添え字がごちゃごちゃしていて，読むのに苦痛を感じるのが普通である．スペクトル系列を理解しようと思ったら，教科書を読むだけではだめで，自分で手を動かして計算しみないといけない．そうすると，スペクトル系列は，実は単純な線形代数の計算にすぎないことがわかるのである．

$r \geqq 3$ のときの $E_r^{p,q}$ は，加群の単射的分解と同様，ほとんど意味不明のものである．しかし，$E_2^{p,q}$ と E^{p+q} は，具体的な意味があることが多い．

代数幾何学に登場する大切なスペクトル系列は，ルレイスペクトル系列とホッジスペクトル系列である．ただし，ホッジスペクトル系列は，普通のスペクトル系列と異なり，$E_2^{p,q}$ からではなく，$E_1^{p,q}$ から始まり，$E_1^{p,q} = H^{p,q}(X) \Longrightarrow E^{p+q} = H^{p+q}(X, \mathbb{C})$ というものである．$H^{p,q}(X)$ はスペクトル系列を使わなくても，ホッジ理論で十分取り扱えるので，このスペクトル系列はあまり使われない．

ルレイスペクトル系列を説明しよう．代数多様体の間の正則写像 $f\colon X \to Y$ があるとする．X 上の層 $\mathfrak{F}$ は，f によって Y 上の層とみなすことができる．この層を $f_*\mathfrak{F}$ と書く．$\mathfrak{F}$ が $\mathfrak{O}_X$-加群のとき，$f_*\mathfrak{F}$ は $\mathfrak{O}_Y$-加群になる．

ところで，$0 \to \mathfrak{A} \to \mathfrak{B} \to \mathfrak{C} \to 0$ が $\mathfrak{O}_X$-加群の完全系列のとき，これに f_* を付けると最後の $\to 0$ が欠落して，$0 \to f_*\mathfrak{A} \to f_*\mathfrak{B} \to f_*\mathfrak{C}$ までしか $\mathfrak{O}_Y$-加群の完全系列にならない．すると，導来関手の一般論から，右導来関手 $\mathbf{R}^i f_*\mathfrak{F}$ が存在して，$\mathbf{R}^0 f_*\mathfrak{F} = f_*\mathfrak{F}$ を満たし，

$$0 \to f_*\mathfrak{A} \to f_*\mathfrak{B} \to f_*\mathfrak{C} \to \mathbf{R}^1 f_*\mathfrak{A} \to \mathbf{R}^1 f_*\mathfrak{B} \to \mathbf{R}^1 f_*\mathfrak{C} \to \mathbf{R}^2 f_*\mathfrak{A} \to \cdots$$

が完全系列になる．Y が 1 点の場合には，$\mathbf{R}^i f_*\mathfrak{F} = H^i(X, \mathfrak{F})$ である．

ルレイスペクトル系列は $E_2^{p,q} = H^p(Y, \mathbf{R}^q f_*\mathfrak{F}) \Longrightarrow E^{p+q} = H^{p+q}(X, \mathfrak{F})$ というもので，$H^p(Y, \mathbf{R}^q f_*\mathfrak{F})$ と $H^n(X, \mathfrak{F})$ の関係を計算するときに使う．

参考文献

[1] 飯高茂『代数幾何学 I, II, III』，岩波講座基礎数学, 1976-77.

[2] 上野健爾『代数幾何 1, 2, 3』, 岩波講座現代数学の基礎, 1998.

[3] 桂利行『代数幾何入門』, 共立講座 21 世紀の数学 17, 1998.

[4] 川又雄二郎『代数多様体論』, 共立講座 21 世紀の数学 19, 1997.

[5] 宮西正宜『代数幾何学』, 裳華房 数学選書 10, 1990.

[6] Robin Hartshorne, *Algebraic Geometry*, GTM52, Springer-Verlag, 1977.

第 6 章
数論におけるコホモロジー

大坪紀之

6.1 はじめに

いままでの章で，コホモロジーとは幾何学的な対象である多様体 (図形) を，加群や線形空間といった代数的対象で捉えようとする道具である，ということは理解されたと思う．しかしコホモロジーは単なるケース・バイ・ケースの道具ではなく，さまざまな幾何学的対象と，それらの間に網の目のように張り巡らされた関係についての総合的な理解を可能にするような,「世界の記述のことば」ともいえる．

数論においてもコホモロジーは不可欠である．むしろ位相幾何学の概念であったコホモロジーを抽象化・代数化する過程で，コホモロジー的な世界観は広がってきたともいえる．この章では，ヴェイユ予想の解決に向けてグロタンディークによって構築された，代数多様体やその拡張であるスキームに対するエタール・コホモロジーを紹介する．この章は前の 5 つの章を直接うけているが，続く 2 つの章とも「こころ」はつながっている．

6.2　代数多様体

高校の数学では 2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ の解を放物線 $y=x^2+ax+b$ と x 軸 $y=0$ の交点とみた．このように座標を導入することにより方程式と図形が対応する．

同じように，n 変数の多項式たち $f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ $(i=1, 2, \cdots, r)$ による共通零点の集合は n 次元空間に「図形」X を定める．一般に独立な式 1 つにつき次元が 1 つ下がるので，X は通常 $d=n-r$ 次元になる．これがアフィン代数多様体であり，代数多様体とはアフィン多様体を貼り合わせたものであった (第 5 章)．この章では，多様体といえば代数多様体のこととする．

第 5 章で見たように，複素数体 $\mathbb{C}$ 上の d 次元の代数多様体 X は $2d$ 次元の位相多様体 $X(\mathbb{C})$ を定めるので，コホモロジーを考えることができる．この「ふつうの」コホモロジーをこの章では，他のコホモロジーと区別するために**ベッチ・コホモロジー**ともよぶ．$X(\mathbb{C})$ のコホモロジーがホッジ構造という豊かな付加構造を持ったように，この章で紹介する代数多様体のコホモロジーには数論的な性質を反映する付加構造が入る．

また，この章ではいろいろな体 k の上で多様体を考える．体 k に k-係数の多項式の根をすべて付け加えた体を $\overline{k}$ と書き k の**代数閉包**とよぶ．$\overline{k}$ は**代数閉体**，つまり $\overline{\overline{k}}=\overline{k}$ であるので，$\overline{k}$ においては多項式は必ず

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$$

と 1 次式の積に分解する．たとえば $\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{C}$ であり，$\mathbb{C}$ は $\mathbb{R}$ に x^2+1 の根を付け加えて得られる．

定義多項式 f_i たちが k-係数のとき，X は k **上の**多様体であるという．X が k 上の多様体，k' が k を含む体のとき，X の点ですべての座標が k' に入る点を k'-**有理点**とよび，それら全体の集合を $X(k')$ と書く．

6.3　有限体

体 k において 1 を p 回足して初めて 0 になったとすると，p は必ず素数になる．この p を k の**標数**という．そのような p が無い場合は k の標数を 0

と定める．有理数体 $\mathbb{Q}$ の標数は 0 であり標数 0 の体は $\mathbb{Q}$ を含むので，$\mathbb{Q}$ は標数 0 の**素体**であるという．

整数環 $\mathbb{Z}$ の剰余環 $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z} = \{0, 1, 2, \cdots, N-1\}$ は，N が素数のときに限り体になることを述べた (第 2 章)．$N = p$ を素数として $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ が体になることを証明しよう．$n \in \{1, 2, \cdots, p-1\}$ とすると，n と p の最大公約数は 1 なので $an + bp = 1$ となる整数 a, b が存在する．p を法とすれば $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ においては $an = 1$ なので n には逆元が存在する．たとえば $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ では $2 \times 3 = 6 = 1$ なので 2 と 3 は互いの逆元である．

素数 p に対して，$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ を $\mathbb{F}_p$ と書く．標数 p の体は $\mathbb{F}_p$ を含む体であり $\mathbb{F}_p$ は標数 p の素体である．$a \in \mathbb{F}_p$ に対して

$$a^p = (\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{a\ 個})^p = \underbrace{1^p + 1^p + \cdots + 1^p}_{a\ 個} = a$$

が成り立つ．逆に $\overline{\mathbb{F}}_p$ の元で $x^p = x$ を満たすもの全体が $\mathbb{F}_p$ である．

各自然数 n に対して

$$\mathbb{F}_{p^n} = \left\{ x \in \overline{\mathbb{F}}_p \;\middle|\; x^{p^n} = x \right\}$$

とおくと $\mathbb{F}_{p^n}$ は p^n 個の元からなる体になる．有限体 (有限個の元からなる体) はこれらしかない．定義から m が n を割りきるとき，またそのときに限り包含関係 $\mathbb{F}_{p^m} \subset \mathbb{F}_{p^n}$ が成り立つ．たとえば $\mathbb{F}_{p^2} \not\subset \mathbb{F}_{p^3}$ であり $\mathbb{F}_{p^2} \cap \mathbb{F}_{p^3} = \mathbb{F}_p$ である．また，$\overline{\mathbb{F}}_p = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{F}_{p^n}$ である．

ここで，標数 p の体に特有の**フロベニウス写像** F を導入する．これは単に p 乗するという写像 $F(a) = a^p$ である．標数 p の体では

$$F(a \cdot b) = (a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p = F(a) \cdot F(b)$$

に加えて

$$\begin{aligned} F(a+b) = (a+b)^p &= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} a^k b^{p-k} \\ &= a^p + b^p + (p\ の倍数) = a^p + b^p = F(a) + F(b) \end{aligned}$$

が成り立つので，F は環の自己準同型である．F を n 回合成した写像を F^n と書くと，$\overline{\mathbb{F}}_p$ の元で F^n で固定されるもの全体が $\mathbb{F}_{p^n}$ である．

X を $\mathbb{F}_p$ 上の多様体とすると，フロベニウス写像は $X(\overline{\mathbb{F}}_p)$ に作用し，F^n における不動点全体が $X(\mathbb{F}_{p^n})$ である．このように有理点を幾何的に解釈することができる．

一般に，体 k に対して体の自己同型 $\overline{k} \to \overline{k}$ で k を固定するもの全体は合成を乗法として群をなす．これを k の**絶対ガロア群**とよび $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ と書く．$\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)$ は F が生成する巡回群 ($\cong \mathbb{Z}$) の完備化 (特に可換) であり，わかりやすい．しかし，たとえば $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ は非可換ではるかに複雑な構造をしている．後で述べるように，エタール・コホモロジーの大きな特徴はガロア群の作用を持つということである．

6.4　楕円曲線

ヴェイユ予想 [W] とは，有限体上の方程式の解の個数に関する予想，つまり有限体上の代数多様体の有理点の個数に関する予想である．この予想の解決への努力が代数幾何学の進歩を大きくうながした．

この節では楕円曲線とその場合のヴェイユ予想を紹介する．曲線は種数 $g = 0, 1, 2, \cdots$ によって分類される (第 2, 5 章参照) が，**楕円曲線**とは種数 1 の曲線のことである．$\mathbb{C}$ 上の曲線は位相多様体としては 2 次元であり，種数は浮き輪の穴の数 (図 2.2) のことになる．したがって $\mathbb{C}$ 上の楕円曲線は 2 次元トーラス T^2 である．歴史的な理由でこのような名前が付いているが，楕円とは異なるものであることに注意しよう．楕円のような 2 次曲線や直線は種数が 0 であり球面 S^2 と対応する．楕円曲線については [ST] などを参照されたい．

ここでは，k 上の楕円曲線とは方程式

$$y^2 = f(x) \quad (\text{ただし } f(x) \text{ は重根を持たない } k\text{-係数の 3 次式})$$

で定義されるアフィン曲線に無限遠点 O を付け加えて射影化したものと思ってよい．

この $f(x)$ が重根を持たないという条件は，曲線が非特異であるということ

と同じである．たとえば $y^2 = x^3 - x$ は (標数 $\neq 2$ ならば) 楕円曲線であるが，$y^2 = x^3$ は右辺が 3 重根を持ち，原点は特異点である．

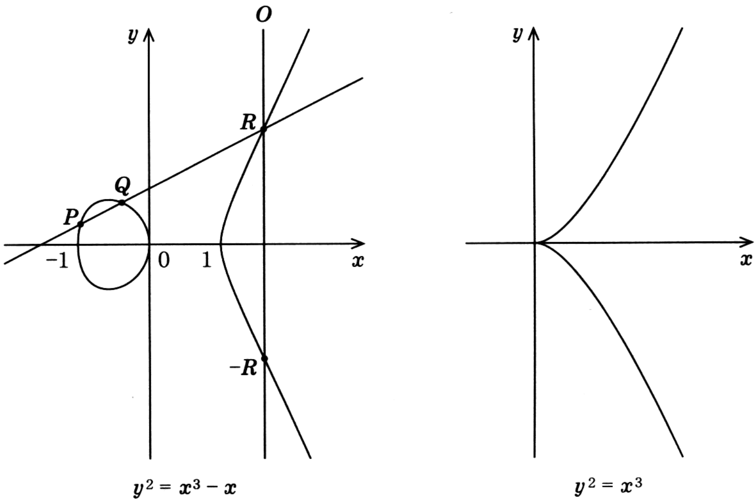


図 6.1

楕円曲線はまた，1 次元のアーベル多様体 (加群の構造をもつ多様体) である．無限遠点 O を加法の単位元として，図 6.1 のように点 P, Q, R が一直線上に並ぶとき $P+Q+R=O$ と定義される．逆元は x 軸に関して対称な点である．この演算は代数的であり k 上定義される．よって $P, Q \in E(k')$ ならば $P+Q=-R \in E(k')$ である．自然数 n に対して n 倍写像 $E(\overline{k}) \to E(\overline{k})$ の核を $E[n]$ と書き E の n **分点**とよぶ．もし k の標数が n と互いに素ならば $E[n] \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ である．また，$E[n]$ には k の絶対ガロア群 $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ が作用する．

任意の $\mathbb{C}$ 上の楕円曲線は，$\mathbb{C}$ を格子 ($\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ と同型な部分群)

$$\Lambda = \left\{ a + b\tau \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z} \right\} \quad (\tau \text{ は虚部が正の複素数})$$

で割ったもの $\mathbb{C}/\Lambda$ として実現できる．図 6.2 の基本領域

$$S = \left\{ x + y\tau \;\middle|\; 0 \leqq x,\ y < 1 \right\}$$

の平行な辺を貼り合わせるとトーラスができる．

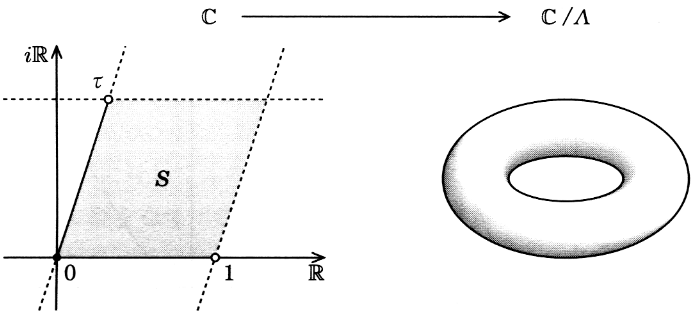


図 6.2

E の演算は $\mathbb{C}$ の加法から自然に誘導されたものになる．したがって $E[n]$ は

$$\left\{ \frac{a}{n} + \frac{b}{n}\tau \;\middle|\; a,\, b = 0,\, 1,\, 2,\, \cdots,\, n-1 \right\}$$

によって代表される．

では，有限体 $\mathbb{F}_p$ 上の楕円曲線 E を考えよう．すべての $x, y \in \mathbb{F}_p$ を代入することで，有限回の計算で $E(\mathbb{F}_p)$ を求めることができる．この位数を N_p とおき，$a_p = p + 1 - N_p$ とする．

たとえば

$$E : y^2 = x^3 - x$$

を考えてみよう．右辺の根は $0, 1, -1$ であり，$p \neq 2$ の場合 (このときは $-1 = 1$ なので重根) を除けば互いに異なるので楕円曲線である．たとえば $p = 3$ の場合は

$$E(\mathbb{F}_3) = \{O,\, (0,0),\, (1,0),\, (2,0)\}$$

の 4 点である．また $p = 5$ の場合は

$$E(\mathbb{F}_5) = \{O,\, (0,0),\, (1,0),\, (2,1),\, (2,4),\, (3,2),\, (3,3),\, (4,0)\}$$

の 8 点である．同様にはじめの方の素数について計算すると

p	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31
N_p	4	8	8	12	8	16	20	24	40	32
a_p	0	-2	0	0	6	2	0	0	-10	0

となっている．p に比べて a_p があまり増えないことが見てとれる．特にこの場合は虚数乗法という理由により，p を 4 で割った余りが 3 のとき，またそのときに限り $a_p = 0$ である．

楕円曲線に対するヴェイユ予想は次のようになる．

予想． 任意の有限体 $\mathbb{F}_p$ 上の楕円曲線に対し，$|a_p| < 2\sqrt{p}$ である．

特に $\lim_{p\to\infty} \dfrac{N_p}{p} = 1$ であり，p を無限に大きくしていくと N_p は p と同じオーダーで増えていることになる．

ここで整数係数の 2 次の多項式 $P(T)$ を

$$P(T) = pT^2 - a_pT + 1$$

とおく．すると，$|a_p| < 2\sqrt{p}$ であることと $P(T)$ の根の絶対値が $\sqrt{p}^{\,-1}$ であることが同値なので，ヴェイユ予想は

予想． $P(T)$ の根の絶対値は $\sqrt{p}^{\,-1}$ である．

といっても同じである．

この予想は，いまだ未解決の大問題であるリーマン予想の類似である．**リーマン・ゼータ関数** $\zeta(s)$ は，s を複素数として，実数部分 $\mathrm{Re}\, s > 1$ で絶対収束する級数

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

で定義され，この範囲では極も零点も持たない．この関数は全複素数平面上の有理型関数に一意的に解析接続され，$s = 1$ で 1 位の極を持つほかは正則である．また，関数等式

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s)$$

が成り立つ．ガンマ関数 $\Gamma(s)$ は 0 以下の整数で 1 位の極を持つので $\zeta(s)$ は負の偶数で 1 位の零点を持つが，これらは**自明な零点**とよばれる．

予想 (リーマン予想).　自明でない零点は $\mathrm{Re}\, s = 1/2$ をみたす．

この予想には素数の分布に関する深い主張がこめられている．詳しくは [KKS] などを参照されたい．

上の $P(T)$ は有限体上の楕円曲線の合同ゼータ関数 (の一部) である．類似を見るために s を複素数とし，$T = p^{-s}$ を $P(T)$ に代入して

$$\zeta_E(s) = P(p^{-s})$$

とおく．$\zeta_E(s) = 0$ とすると，ヴェイユ予想の第 2 の形より $|p^{-s}| = \sqrt{p}^{\,-1}$ である．$|p^s| = p^{\mathrm{Re}\, s}$ に注意すると，ヴェイユ予想は

$\zeta_E(s)$ の零点は $\mathrm{Re}\, s = 1/2$ をみたす

ということと同値である．

6.5　ヴェイユ予想

では一般の場合のヴェイユ予想を紹介しよう．X を有限体 k 上の射影的で非特異な d 次元の代数多様体とする．簡単のため $k = \mathbb{F}_p$ とする．自然数 n に対して X の $\mathbb{F}_{p^n}$-有理点の数を N_{p^n} とおく．このとき X の**合同ゼータ関数** $Z_X(T)$ が

$$Z_X(T) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{N_{p^n}}{n} T^n\right)$$

と定義される．ただし exp は指数関数

$$\exp(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

である．したがって $Z_X(T)$ は T に関する $\mathbb{Q}$-係数のべき級数である．

予想 (ヴェイユ予想).

(i) 整数係数の多項式 $P_0(T), P_1(T), P_2(T), \cdots, P_{2d}(T)$ があり

$$Z_X(T) = \frac{P_1(T)\cdots P_{2d-1}(T)}{P_0(T)P_2(T)\cdots P_{2d}(T)}$$

となる．$P_0(T) = 1 - T$, $P_{2d}(T) = 1 - p^d T$ である．

(ii) X が有理数体上の多様体 $\mathfrak{X}$ の還元であるとき，$P_i(T)$ の次数は $\mathfrak{X}(\mathbb{C})$ の i 次ベッチ数 $b_i = \dim_{\mathbb{Q}} H^i(\mathfrak{X}(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$ と等しい．

(iii) $Z_X(T) = \pm p^{-\frac{d\chi}{2}} T^{-\chi} Z_X\left(\frac{1}{p^d T}\right)$. ただし，$\chi$ はオイラー・ポアンカレ標数 $\chi = \sum_{i=0}^{2d}(-1)^i b_i$ である．

(iv) $P_i(T)$ の根の絶対値は $\sqrt{p}^{\,-i}$ である．

まず (i) は，$Z_X(T)$ が有理関数であることを主張している．しかも (ii)–(iv) で特徴づけられる各部分に分かれるというのである．

そして (ii) で有限体上の問題に，複素多様体のコホモロジーが出てきた．ここで還元とは，整数係数の多項式を $\mathbb{F}_p$-係数のものと見て得られる多様体ということである (正確な定義は次の節を参照)．このことは，非常に離散的な対象に見える有限体上の多様体にもなんらかの「形」，しかも複素数の世界におけるものと共通性のあるもの，の存在を示唆している．

ヴェイユは抽象的代数幾何学の基礎を築き，アーベル多様体論を用いて曲線の場合のヴェイユ予想を証明した．そして有限体上の多様体に対する「良い」コホモロジー理論の存在が一般の場合の解決をもたらすのではないかと考えた．これを実現したのが後で述べるエタール・コホモロジーである．

では，どのようにしてコホモロジーが有理点の個数から定まるゼータ関数と結びつくのだろうか．ヴェイユが求めた「良い」コホモロジー理論を $X \mapsto H^i(X)$ と書こう．各 $H^i(X)$ はある標数 0 の体 K 上の有限次元の線形空間であり，$0 \leqq i \leqq 2d$ のとき以外は $H^i(X) = 0$ である．

そしてコホモロジーというからには，多様体 X から Y に写像 $f\colon X \to Y$ があったとき，コホモロジーには引き戻しとよばれる逆向きの線形写像 $f^*\colon H^i(Y) \longrightarrow H^i(X)$ が誘導される．特に X から X 自身に写像があれば $H^i(X)$ には自己線形写像が誘導される．$H^i(X)$ の基底を 1 組とると f^* は行列表示され，その固有多項式 (基底の取り方によらない) を考えることがで

きる．

実はヴェイユ予想の $P_i(T)$ たちは，i 次のコホモロジーにフロベニウス写像が誘導する自己線形写像の固有多項式なのである．

有理点とコホモロジーを結びつけるのはレフシェッツ型の不動点公式 (固定点公式もしくは跡公式ともいう) である (第 2 章参照)．この公式は，X から X 自身への写像があったとき，その不動点の数はコホモロジーへの作用のトレース (跡) の交代和で書ける，というものである．今の場合だと，N_{p^n} はフロベニウスの合成 F^n の不動点の数であったから，

$$N_{p^n} = \sum_{i=0}^{2d} (-1)^i \operatorname{tr}((F^*)^n; H^i(X))$$

となる (合成写像の引き戻しは引き戻しの合成なので，$(F^n)^* = (F^*)^n$ である)．ここで，$H^i(X)$ の基底をうまく取って F^* の行列が三角行列

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \alpha_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_b \end{pmatrix}$$

で表されたとすると，

$$\operatorname{tr}((F^*)^n; H^i(X)) = \operatorname{tr} A^n = \alpha_1^n + \alpha_2^n + \cdots + \alpha_b^n$$

である．一方，固有多項式は

$$\det(1 - F^*T; H^i(X)) = \det(1 - AT) = (1 - \alpha_1 T)(1 - \alpha_2 T) \cdots (1 - \alpha_b T)$$

である．両辺の対数 log をとってべき級数の等式

$$-\log(1 - \alpha T) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n} T^n$$

を用いると

$$-\log\left(\det(1 - F^*T; H^i(X))\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{tr}((F^*)^n; H^i(X))}{n} T^n$$

である．両辺の i に関する交代和をとり，不動点公式を用いると

$$P_i(T) = \det(1 - F^*T; H^i(X))$$

として (i) の表示が成り立つ．特に $P_i(T)$ の次数は $\dim_K H^i(X)$ であり，$P_i(T)$ の根はフロベニウスの固有値の逆数になる．

予想の (iii) は，リーマン・ゼータ関数の関数等式の類似である．$\zeta_X(s) = Z_X(p^{-s})$ とおくと関数等式 $\zeta_X(s) \leftrightarrow \zeta_X(d-s)$ が得られる．これもコホモロジーの基本的な性質から従うが，それはポアンカレ双対性である (第 2 章参照)．つまり F^* の作用を保つ同型

$$H^i(X) \cong \mathrm{Hom}_K(H^{2d-i}(X), K(-d))$$

が成り立つ．ただし，$K(-d)$ は 1 次元の K-線形空間であり F^* が p^d 倍で作用するものである．特に，$H^i(X)$ と $H^{2d-i}(X)$ は同じ次元であり，前者が固有値 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_b$ を持てば後者の固有値は $\alpha_1^{-1}p^d, \alpha_2^{-1}p^d, \cdots, \alpha_b^{-1}p^d$ である．

このようにして，コホモロジーの形式的な性質のみから，有限体上の方程式の解の数を数えるという微妙な問題が「線形代数の問題」になるのである．ここでは，たとえばエタール・コホモロジーがどう定義されるかを知っている必要はない．

最後に，(iv) がリーマン予想の類似である．楕円曲線の場合は $P_0(T)$ と $P_2(T)$ が簡単なので $P(T) = P_1(T)$ のみを扱ったわけである．この根の絶対値の肩に現れる整数 i のことを**重み**という．ゼータ関数が 0 から $2d$ の重みによって各部分に分かれるのである．

グロタンディークは，シリーズ [SGA](代数幾何学セミナー) においてエタール・コホモロジーの理論を建設し，ヴェイユ予想の (iv) 以外を証明した．最終的には，弟子のひとりであるドリーニュが 1974 年に証明を完成することになる．その証明については，[Kg], [Kt] などを参照されたい．

6.6　スキーム

グロタンディークは [SGA] に先立ち [EGA](代数幾何学原論) において，ヴェイユ，ザリスキー，セールらの仕事をふまえ，抽象的代数幾何学の新しい基礎を構築したが，その中心概念は代数多様体の一般化である**スキーム** (概型) である．

第 5 章で述べられたように，R を環とするとき，R の素イデアル全体の集合 $\operatorname{Spec} R$ にザリスキー位相を入れた位相空間と構造層の組がアフィン・スキームである．イデアル I に対して I を含む素イデアル全体を $V(I)$ とおく．たとえば $V(R)=\phi$, $V((0))=\operatorname{Spec} R$ である．$V(I)$ の形の集合全体を閉集合と定めると $\operatorname{Spec} R$ に位相が定まる．これが**ザリスキー位相**である．

任意の環 R に対し，R を座標環に持ち，R の局所環が構造層をなすような幾何的な対象が構成できるのである．たとえば整数全体の環 $\mathbb{Z}$ に対して $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ を考えると，これは 1 次元のスキームであり，曲線のように見ることができる．

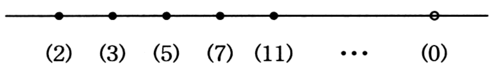


図 6.3

$\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ の点は，素数 p の生成する (p) たちと (0) である．(p) は極大イデアルなので $V((p))=\{(p)\}$ であり，(p) は閉点である．(0) は閉包が全体になり生成点とよばれる．

一般に環準同型 $f\colon R\to S$ があれば S の素イデアル $\mathfrak{p}$ に対して $f^{-1}(\mathfrak{p})$ は R の素イデアルになり，この対応でアフィン・スキームの逆向きの射

$$\varphi\colon \operatorname{Spec} S \longrightarrow \operatorname{Spec} R$$

が誘導される．また，k を体とすると，$\operatorname{Spec} k$ は (0) 1 点からなる 0 次元のスキームである．

標準的な環準同型 $\mathbb{Z}\to\mathbb{F}_p$ は $\operatorname{Spec}\mathbb{F}_p \longrightarrow \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ を誘導するが，その像は (p) である．したがって各 (p) には有限体 $\mathbb{F}_p$ が乗っている．また，埋め込み

$\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ の誘導する射 $\mathrm{Spec}\,\mathbb{Q} \to \mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}$ の像は (0) である．このようにして，すべての標数の世界を同時に扱うことができるのがスキームの利点である．

では，$f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{Q}[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ $(i = 1, 2, \cdots, r)$ が定義する $\mathbb{Q}$ 上のアフィン代数多様体を考えよう．分母があれば適当にはらって定義多項式を整数係数にすると，アフィン・スキーム

$$\mathfrak{X} = \mathrm{Spec}\left(\mathbb{Z}[x_1, x_2, \cdots, x_n]/(f_1, f_2, \cdots, f_r)\right)$$

を考えることができる．自然な環準同型 $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}[x_1, x_2, \cdots, x_n]/(f_1, f_2, \cdots, f_r)$ の誘導する射 $\varphi\colon \mathfrak{X} \to \mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}$ によって $\mathfrak{X}$ を $\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}$ 上のスキームとみなせる．点 (p) 上のファイバー $X_{\mathbb{F}_p} = \varphi^{-1}((p))$ をとるということは，環では $\underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{F}_p$ するということであり，

$$X_{\mathbb{F}_p} = \mathrm{Spec}\left(\mathbb{F}_p[x_1, x_2, \cdots, x_n]/(\overline{f}_1, \overline{f}_2, \cdots, \overline{f}_r)\right)$$

は $\mathbb{F}_p$ 上の多様体になる．ただし，$\overline{f}$ は f を自然に $\mathbb{F}_p$-係数の多項式と見たものである．同様に (0) 上のファイバー

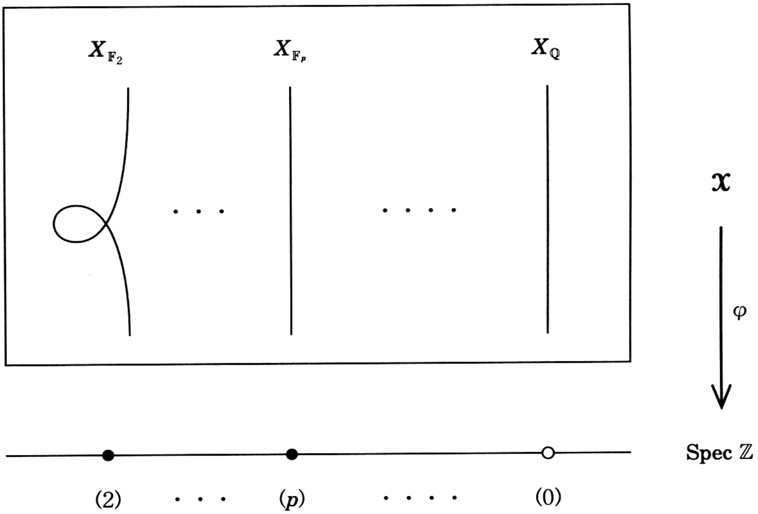


図 6.4

$$X_{\mathbb{Q}} = \operatorname{Spec}\bigl(\mathbb{Q}[x_1, x_2, \cdots, x_n]/(f_1, f_2, \cdots, f_r)\bigr)$$

は $\mathbb{Q}$ 上の多様体である．したがって，$\mathfrak{X}$ は $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ をパラメータ空間とする，標数の異なる多様体の族をなしている．このようにして $\mathbb{Q}$ 上の多様体から $\mathbb{F}_p$ 上の多様体を得る操作を p における**還元**とよぶ．

たとえば，$\mathfrak{X} = \operatorname{Spec}\bigl(\mathbb{Z}[x, y]/(y^2 - x^3 + x)\bigr) \longrightarrow \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ を考えよう (図 6.4)．これは曲線の族である．§6.4 でみたように，(2) の上のファイバーは特異であるが，それ以外のファイバーは非特異であり楕円曲線である．

6.7　エタール・コホモロジー

エタール・コホモロジーは位相多様体のコホモロジーの代数的な類似であり，グロタンディークによってヴェイユ予想を解くという動機から定義されたものである．

ザリスキー位相というのは非常に粗く，そのコホモロジーは第 5 章でみたように消えやすい性質を持っている．層のコホモロジーには局所と大域のずれが現れるのだから，求めるコホモロジーを得るためには適切に開集合を加えて位相を細かくしなければならない．そこでグロタンディークが到達したのが，エタールな空間である．これはもはや通常の位相空間ではなく，**グロタンディーク位相**，さらには**トポス**，とよばれる拡張された空間の概念の 1 つの場合である．

ではまず，エタールな空間において開集合の役割を演じるエタール射について説明しよう．スキームの射が**エタール**なとは，平坦かつ不分岐という性質を満たすことであり，位相空間における局所同型という概念の代数的な類似である．どちらも局所的な概念なのでアフィン・スキームの射

$$\varphi\colon \operatorname{Spec} S \longrightarrow \operatorname{Spec} R \quad (f\colon R \to S)$$

の場合に説明する．

S は $r \cdot s = f(r)s$ $(r \in R,\ s \in S)$ によって R-加群とみなせる．φ が**平坦**とは S が平坦 R-加群であること，つまり，任意の R-加群の完全系列 $0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$ に対し，$0 \to M_1 \underset{R}{\otimes} S \to M_2 \underset{R}{\otimes} S \to M_3 \underset{R}{\otimes} S \to 0$ が

完全系列になることである (単射性以外は常に成り立つ). たとえば自由 R-加群は平坦である. 多様体の射の場合には, 平坦であることと各ファイバーの次元が一定であることはほぼ同じである.

環の準同型 $f\colon R \to S$ に対して**微分** $\Omega_{S/R}$ を定義する. これは ds ($s \in S$) が生成する自由 S-加群を関係 $d(s+s') = ds + ds'$, $d(ss') = sds' + s'ds$, $d(f(r)) = 0$, (s, $s' \in S$, $r \in R$) で割って得られる S-加群である. たとえば $R = k$, $S = k[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ とすると, $g \in S$ に対して $dg = \sum \dfrac{\partial g}{\partial x_i} dx_i$ なので $\Omega_{S/R}$ は $dx_1, dx_2, \cdots, dx_n$ の生成する自由 S-加群になる. 上の射 φ が**不分岐**であるとは $\Omega_{S/R} = 0$ であることである.

エタール射の例を少し挙げよう. $R = \mathbb{C}[x]$ とすると, 第 5 章でみたように R の (0) でない素イデアルは $(x - a)$ という形をしており $\mathbb{C}$ の点 a と同一視できる. では $S = \mathbb{C}[y]$ を同じものとし, $f\colon R \to S$ を $f(x) = y^2$, $f(c) = c$ ($c \in \mathbb{C}$) としよう. すると $\varphi((y - b)) = (x - b^2)$ なので $\mathbb{C}$ に誘導される射は 2 乗写像である.

$\mathbb{C}$ の 0 以外の点 a をとり, $a = b^2$ であるとする. a の十分小さな近傍 U

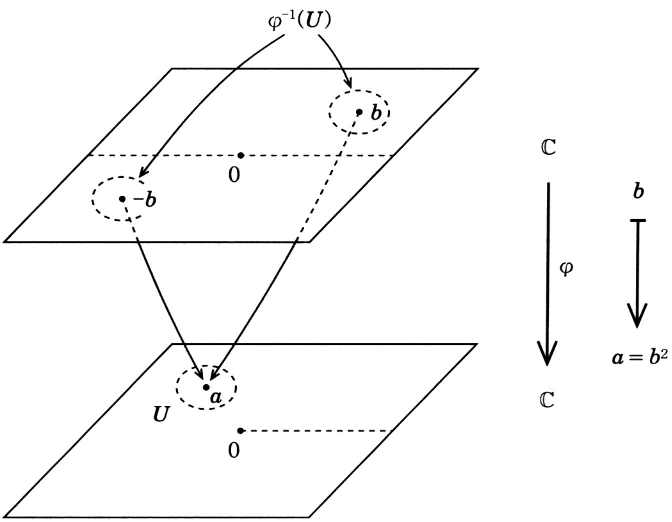


図 6.5

は平方根をとる写像により b (もしくは $-b$) の近傍と位相同型になる．しかし 0 ではそのような局所的な逆写像は持ち得ない．したがって φ は 0 を除いたところで局所位相同型である．

S は 1 と y が生成する自由 R-加群なので φ は平坦である．では微分を計算してみよう．$g(y) \in S$ に対して，$d(g(y)) = g'(y)dy$ なので $\Omega_{S/R}$ は S 上 dy で生成される．また $0 = d(f(x)) = d(y^2) = 2ydy$ なので $\Omega_{S/R} = \mathbb{C}\,dy$ となる．したがってこの射は不分岐ではない．0 を除くということは，環の方では素イデアル (x) と (y) を除くことであり，$R^* = \mathbb{C}[x, 1/x]$, $S^* = \mathbb{C}[y, 1/y]$ を考えることである．このとき $dy = \dfrac{1}{2y}d(f(x)) = 0$ なので $\Omega_{S^*/R^*} = 0$ となる．したがって $\operatorname{Spec} S^* \longrightarrow \operatorname{Spec} R^*$ は不分岐であり，エタールでもある．

次に数論的な例をみよう．$R = \mathbb{Z}$, $S = \mathbb{Z}[\sqrt{-1}\,]$, $f\colon \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}[\sqrt{-1}\,]$ を自然な埋め込みとする．$\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ は 1 と $\sqrt{-1}$ が生成する自由 $\mathbb{Z}$-加群なので平坦である．このとき，

$$d(m + n\sqrt{-1}) = dm + d(n\sqrt{-1}) = nd(\sqrt{-1})$$

なので $\Omega_{\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]/\mathbb{Z}}$ は $d(\sqrt{-1})$ によって生成されるが，

$$0 = d(-1) = d(\sqrt{-1}^{\,2}) = 2\sqrt{-1}\,d(\sqrt{-1})$$

なので $2d(\sqrt{-1}) = 0$, よって $\Omega_{\mathbb{Z}[\sqrt{-1}\,]/\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ である．

ここで分岐しているのは素イデアル (2) である．$\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ では $(2) = (1 + \sqrt{-1})^2$ と素イデアルの 2 乗になる．しかし，$p \equiv 1 \pmod 4$ の時は $(p) = \mathfrak{p}\overline{\mathfrak{p}}$ と互いに異なる 2 つの素イデアルの積になり，$p \equiv 3 \pmod 4$ の時は (p) は $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}\,]$ でも素イデアルであり，いずれも不分岐である．

したがって $R^* = \mathbb{Z}[1/2]$, $S^* = \mathbb{Z}[\sqrt{-1}, 1/2]$ として 2 を可逆にすれば (2) とその上の点 $(1 + \sqrt{-1})$ が除かれ，$d(\sqrt{-1}) = \dfrac{1}{2} \cdot 2d(\sqrt{-1}) = 0$ なので $\Omega_{S^*/R^*} = 0$ になる．したがって $\operatorname{Spec} S^* \longrightarrow \operatorname{Spec} R^*$ はエタールになる．

エタールなグロタンディーク位相とはふつうの位相空間における開部分集合 $U \subset X$ をエタール射 $Y \to X$ で置き換えたものである．ザリスキー開部分集合の埋め込み写像 $U \hookrightarrow X$ はエタール射であるが，それらのエタールな被覆

をも「開集合」のように扱う理論である．

X をスキームとする．スキーム Y とエタール射 $Y \to X$ の組を X 上の**エタール・スキーム**とよぶ．エタール射の族 $\left\{U_i \xrightarrow{\varphi_i} U\right\}_{i \in I}$ が**エタール被覆**であるとは $\bigcup_{i \in I} \varphi_i(U_i) = U$ となることである．X 上のエタール・スキーム全体にこのように被覆の族を指定したものが，X に付随するエタールな空間 X_{et} である．その上の加群の**層** $\mathfrak{F}$ とは，エタール・スキーム $Y \to X$ に対して加群 $\mathfrak{F}(Y)$ を対応させる反変関手で，被覆に関して通常の層と類似の条件をみたすものとして定義される．

X_{et} 上の加群の層の圏から加群の圏への共変関手 $\Gamma\colon \mathfrak{F} \mapsto \mathfrak{F}(X)$ は左完全である．その右導来関手として**エタール・コホモロジー**

$$H^i(X_{\mathrm{et}}, \mathfrak{F}) = \mathbf{R}^i\Gamma(\mathfrak{F}),\ (i = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

が定義される．では，l 進コホモロジー

$$H^i(X_{\mathrm{et}},\ \mathbb{Q}_l) = \varprojlim_n H^i(X_{\mathrm{et}},\ \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}) \underset{\mathbb{Z}_l}{\otimes} \mathbb{Q}_l$$

を定義しよう．

一般に，環や加群の系列

$$\cdots \to M_{n+1} \xrightarrow{\pi_n} M_n \to \cdots \xrightarrow{\pi_2} M_2 \xrightarrow{\pi_1} M_1 \quad (\pi_n \text{ は準同型})$$

があったとき，**逆極限**もしくは**射影的極限** $\varprojlim_n M_n$ とは，列 $(m_n)_{n \geq 1}$ $(m_n \in M_n)$ ですべての n について $\pi_n(m_{n+1}) = m_n$ となるもの全体の集合である．$\varprojlim_n M_n$ には自然に環や加群の構造が入る．

たとえば，素数 l に対して自然な系

$$\cdots \to \mathbb{Z}/l^{n+1}\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z} \to \cdots \to \mathbb{Z}/l^2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$$

の逆極限を $\mathbb{Z}_l$ と書くが，これは $\mathbb{Z}$ を含む環であり l **進整数環**とよばれる．$\mathbb{Z}_l$ に分母を加えて得られる標数 0 の体を $\mathbb{Q}_l$ と書き，l **進体**とよぶ．

エタール・コホモロジーが良い性質を満たすのは層が有限のときである．特

に l を X 上で可逆な素数 (X が体 k 上の多様体なら k の標数と異なるということ) として，定数層 $\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}$ のコホモロジー $H^i(X_{\mathrm{et}}, \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z})$ を考えると，これは $\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}$-加群の構造を持ち，その逆極限は $\mathbb{Z}_l$-加群になる．したがって，上のように定義した $H^i(X_{\mathrm{et}}, \mathbb{Q}_l)$ は $\mathbb{Q}_l$-線形空間になる．

ヴェイユ予想の証明に用いる $H^i(X)$ は $H^i(\overline{X}_{\mathrm{et}}, \mathbb{Q}_l)$ によって与えられる．ただし，$\overline{X}$ は体 k 上の多様体の係数を $\overline{k}$ まで拡大したもの (たとえば，$X = \operatorname{Spec} k[x]$ ならば $\overline{X} = \operatorname{Spec} \overline{k}[x]$) である．

絶対ガロア群 $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ は $\overline{X}$ に作用するので，そのコホモロジーにも作用する．このことが非常に大事である．たとえば，任意の楕円曲線 E に対して $H^1(\overline{E}_{\mathrm{et}}, \mathbb{Q}_l)$ はいつでも 2 次元の $\mathbb{Q}_l$-線形空間である．しかし，代数的にはまったく異なる楕円曲線たちの個性が表れるのは，ガロア群の作用である．

特に k が有限体のときはフロベニウスの作用が本質的である．ヴェイユ予想の (iv)(ドリーニュの定理) は「$H^i(\overline{X}_{\mathrm{et}}, \mathbb{Q}_l)$ へのフロベニウスの作用の重みが i である」ということになる．ここで注意したいのは l は p と異なる素数ならば何でもよいということである．固有多項式 $P_i(T)$ は定義からは $\mathbb{Q}_l$-係数でしかないが，実は $\mathbb{Z}$-係数であり，しかも l の選び方によらないのである．このことは共通のモチーフ (§6.9 参照) の存在を暗示している．

標数が $p > 0$ の体上の多様体に対しては $\mathbb{Q}_p$-係数のエタール・コホモロジー (つまり $l = p$ の場合) は良いコホモロジーにはならない．この場合の良い p 進的なコホモロジーとして，やはりグロタンディークによって考え出されたのが，クリスタル・コホモロジーである．エタール・コホモロジーはベッチ・コホモロジーの類似であったが，クリスタル・コホモロジーはドラーム・コホモロジーの類似である．

6.8　例

X を複素数体 $\mathbb{C}$ 上の射影的で非特異な代数多様体とする．そのエタール・コホモロジーはベッチ・コホモロジーと同じになる．つまり，比較同型

$$H^i(X_{\mathrm{et}}, \mathbb{Q}_l) \cong H^i(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) \underset{\mathbb{Q}}{\otimes} \mathbb{Q}_l$$

が成り立つ．さらに X が $\mathbb{Q}$ 上定義されている場合，左辺は X の p での還元 (非特異とする) のエタール・コホモロジーと同型になる (このように異なる標数の世界がつながるのがスキームの恩恵である)．ヴェイユ予想の (ii) はこれらの事実より従う．

E を体 k 上の楕円曲線としよう．E の l^n 分点は系列

$$\cdots \to E[l^{n+1}] \xrightarrow{\times l} E[l^n] \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\times l} E[l^2] \xrightarrow{\times l} E[l]$$

をなす．この逆極限を**テイト加群**とよび，$T_l(E)$ と書く．もし l が k の標数と異なるならば，これは階数が 2 の自由 $\mathbb{Z}_l$-加群である．実はエタール・コホモロジー $H^1(\overline{E}_{\mathrm{et}}, \mathbb{Q}_l)$ は $T_l(E) \underset{\mathbb{Z}_l}{\otimes} \mathbb{Q}_l$ と同型である．(ただし，ガロア群の作用はすこしずれる．たとえば $k = \mathbb{F}_p$ ならば，フロベニウスの作用が p 倍だけずれる．)

一般に，種数 g の曲線 C に対してヤコビ多様体とよばれる g 次元のアーベル多様体 $J = \mathrm{Jac}(C)$ が定まる．楕円曲線 E のヤコビ多様体は E 自身である．このとき

$$H^1(\overline{C}_{\mathrm{et}}, \mathbb{Q}_l) \cong H^1(\overline{J}_{\mathrm{et}}, \mathbb{Q}_l) \cong T_l(J) \underset{\mathbb{Z}_l}{\otimes} \mathbb{Q}_l \cong \mathbb{Q}_l^{2g}$$

が成り立つ．このように，曲線の場合にはヤコビ多様体のテイト加群がエタール・コホモロジーの代わりを果たせるために，ヴェイユ予想がヴェイユ自身によって証明されていたわけである．

今までは代数閉体上の「幾何的な」エタール・コホモロジー ($\overline{X}$ のコホモロジー) を見てきたが,「数論的な」エタール・コホモロジーも紹介しよう．

まず，多様体が体 k 上の「1 点」 $\mathrm{Spec}\, k$ である場合を考える．k に k-係数の重根を持たない多項式 $f(x)$ の根 α を付け加えて得られる体 k' を k の有限次分離拡大という．このとき $\mathrm{Spec}\, k' \to \mathrm{Spec}\, k$ はエタール被覆である．なぜなら，$\Omega_{k'/k}$ は k' 上 $d\alpha$ が 生成するが，$0 = df(\alpha) = f'(\alpha)d\alpha$ であり，重根を持たないという条件より $f'(\alpha) \neq 0$ なので $d\alpha = 0$ となるからである．逆に $\mathrm{Spec}\, k$ のエタール被覆はこれらの有限和だけである．

したがってエタールな位相では $\mathrm{Spec}\, k$ は一般にはまったく 1 点ではなく,

付随するエタールな空間は基本群が絶対ガロア群 $G = \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ であるような大きな空間になる．そして $(\mathrm{Spec}\, k)_{\mathrm{et}}$ 上の層とは G-加群のことになり，そのエタール・コホモロジーは**ガロア・コホモロジー**になる．

ガロア・コホモロジーを簡単に紹介しよう．群 G が加群 M に左から作用するとは，$g \in G$, $m \in M$ に対して $g \cdot m \in M$ が定まり，$1 \cdot m = m$, $(gg') \cdot m = g \cdot (g' \cdot m)$, $g \cdot (m + m') = g \cdot m + g \cdot m'$ を満たすことである．左 G-加群の圏から加群の圏への，G-不変部分をとるという関手

$$M \longmapsto M^G = \left\{ m \in M \;\middle|\; g \cdot m = m \ (\forall g \in G) \right\}$$

は左完全関手であり，その右導来関手が G の M-係数コホモロジー $H^i(G, M)$ である．特に G がガロア群の場合，G のコホモロジーをガロア・コホモロジーという．

これは第 4 章の言葉で言い換えられる．一般に G を群とするとき，G の元を基底とする自由 $\mathbb{Z}$-加群

$$\mathbb{Z}[G] := \left\{ \sum_{g \in G} a_g g \;\middle|\; a_n \in \mathbb{Z} \right\} \quad (\text{ただし，和 } \sum_{g \in G} \text{ は有限和})$$

には，$(ag)(bh) = (ab)(gh)$ $(a, b \in \mathbb{Z};\ g, h \in G)$ と定めることで，(一般には非可換な) 環の構造が入る．この $\mathbb{Z}[G]$ を G の定める**群環**という．左 G-加群 M は，自然に左 $\mathbb{Z}[G]$-加群とみなせ，

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, M) \cong M^G;\ f \mapsto f(1)$$

である．したがって $H^i(G, M) = \mathrm{Ext}^i_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, M)$ が成り立つ．

§6.3 で $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ は複雑であると述べたが，その構造を理解することは数論を研究する者の最も大きな夢のひとつである．多様体を考えることはその上の関数の環 (の層) を考えることであり，その観察がスキームのアイディアにつながったように，ガロア群を考えるということはそれが作用する空間を考えることでもある．そしてそのような空間があればそのコホモロジーを調べることはもはや自然であろう．

$\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ の可換化 (正確には最大の可換な商) の構造は類体論によって分

かっているが，類体論はガロア・コホモロジーによって明快に記述される．ワイルズのフェルマー予想の解決を導いた結果は非可換類体論への一歩とみることができる ([Fj1] 参照) が，その証明においてもガロア・コホモロジーは主要な役割を果たしている．

一般の体 k 上の多様体 X の「数論的な」エタール・コホモロジーは，$\overline{X}$ のエタール・コホモロジーと，それを G-加群 $(G = \mathrm{Gal}(\overline{k}/k))$ とみたときのガロア・コホモロジーがからみあったものになる．それを精密に分析するのが第 4 章にあるルレイ型のスペクトル系列

$$E_2^{p,q} = H^p\big(G,\, H^q(\overline{X}_{\mathrm{et}},\, \mathcal{F})\big) \Longrightarrow E^n = H^n(X_{\mathrm{et}},\, \mathcal{F})$$

である．

たとえば X を k 上の非特異で射影的な d 次元の多様体，$\mathcal{F} = \mathbb{Q}_l$，とする．このとき，$0 \leqq q \leqq 2d$ の範囲以外では $H^q(\overline{X}_{\mathrm{et}},\, \mathbb{Q}_l) = 0$，よって $E_2^{p,q} = 0$ である．一方 p に関しては k の性質を反映し，たとえば $k = \mathbb{Q}$ とすると $p = 0, 1, 2$ 以外では $E_2^{p,q} = 0$ である．また，ヴェイユ予想を用いると $q \neq 0$ のとき $E_2^{0,q} = 0$ であることもわかる．したがって，$n > 0$ のとき

$$H^n(X_{\mathrm{et}},\, \mathbb{Q}_l) \cong H^1\big(G,\, H^{n-1}(\overline{X}_{\mathrm{et}},\, \mathbb{Q}_l)\big) \oplus H^2\big(G,\, H^{n-2}(\overline{X}_{\mathrm{et}},\, \mathbb{Q}_l)\big)$$

と計算される (特に $n > 2d+2$ のときは $H^n(X_{\mathrm{et}},\, \mathbb{Q}_l) = 0$)．また $n = 0$ のときは $H^0(X_{\mathrm{et}},\, \mathbb{Q}_l) \cong \mathbb{Q}_l$ である．

6.9 モチーフ

モチーフまたは**モチーフ的コホモロジー**とは，エタール・コホモロジーなどの研究の過程でグロタンディークが自然に到達した哲学であり，現在も多くの問題と示唆を我々に与えている．

代数多様体 X を考えよう．これは 1 つのモチーフ $h(X)$ を定める．簡単のため，X は有理数体上の非特異で射影的な多様体だとする．

X を $\mathbb{C}$ 上で考えるとベッチ・コホモロジー $H^i(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$ を考えることができた．ホッジ理論によってこのコホモロジーはホッジ分解を持つ (第 5 章参

照)．また，もともと実数体上で定義されていたので複素共役が作用する．

一方，各素数 l ごとに l 進エタール・コホモロジー $H^i(\overline{X}_{\mathrm{et}}, \mathbb{Q}_l)$ が定義され，これらにはガロア群 $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ が作用する．

このように，1 つの多様体に対し無限の種類のコホモロジー (線形空間 + 付加構造) を考えることができ，それぞれが多様体のある側面を照らし出しているのである．しかし内在する性質と構造には驚くほどの共通性がみられる．たとえば，$H^i(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$ の次元，すなわちベッチ数は，すべての $H^i(\overline{X}_{\mathrm{et}}, \mathbb{Q}_l)$ の次元と等しいのであった．

モチーフとは，多様体に付随する不変量であり，ありとあらゆるコホモロジーはその「具現」,「実現」として得られるような，多様体の「化身」である．逆に言えば，コホモロジーという手段によって近づける最も多様体に近い場所をとりまいている,「核心の中の核心」といえる．

さらに誤解を恐れずに言えば，モチーフとは多様体の圏の可換化，線形化，といえる．多様体 X はモチーフをとることで，各モチーフ的コホモロジーの「和」

$$h(X) = h^0(X) \oplus h^1(X) \oplus \cdots \oplus h^{2d}(X)$$

とみることができるのである．ゼータ関数が重みによって分かれることをみたが，すでにモチーフが重みによって分かれているのである．多様体はモチーフに「化身」し，エタール・コホモロジーとして「実現」され，固有多項式をとることでゼータ関数となり，たとえば有限体上での有理点の数という数論的なものと結びつく．

モチーフについて興味を持たれた方はグロタンディーク自身の本 [G] を読まれたい．モチーフの哲学はその後，混合モチーフ ([S] を参照)，モチーフ的ガロア群 ([Fj2] を参照)，モチーフ的ホモトピー，といった理論を生んでいる．

「コホモロジー」的な思考は数論に限らず (数学にも限らず) ますます広がっていくに違いない．のみならず，来るべき数学の姿を模索するための足がかりになるとも期待できる ([Fk] を参照)．

参考文献

[EGA] Alexandre Grothendieck and Jean Dieudonné, *Élements de Géométrie Algébrique*, Publ. Math. IHES, 4,8,11,17,20,24,28,32, 1960-67.

[Fj1] 藤原一宏「非可換類体論のめざすもの」,『数学の楽しみ』17 号, 日本評論社, 2000.

[Fj2] 藤原一宏「ガロア理論」,『現代数学の土壌 2 − 数学をささえる基本概念』所収, 日本評論社, 2001.

[Fk] 深谷賢治「ホモロジー」,『現代数学の土壌 −数学をささえる基本概念』所収, 日本評論社, 2000.

[G] アレクサンドル・グロタンディーク (辻雄一訳)『収穫と蒔いた種と − 数学者の孤独な冒険』, 現代数学社, 1989.

[Kg] 久賀道郎『ドクトル・クーガーの数学講座 1』, 日本評論社, 1992.

[KKS] 加藤和也, 黒川信重, 斎藤毅「数論 2 − 類体論とは」,『現代数学の展開』, 岩波講座, 現代数学の基礎, 1998.

[Kt] 加藤和也「Weil 予想とエタールコホモロジー」,『現代数学の展開』, 岩波講座, 刊行予定.

[S] 斎藤秀司「モチーフ − グロタンディークの見果てぬ夢」,「代数幾何と数論」, ともに,『別冊・数理科学』「数論の歩み − 未解決問題への挑戦」所収, サイエンス社, 2000.

[SGA] Alexandre Grothendieck et al., *Séminaires de Géométrie Algébrique.* (1〜7-II), Lecture Notes in Math., Springer(SGA2 は North-Holland), 1968-77.

[ST] J. H. シルバーマン／ J. テイト (足立恒雄他訳)『楕円曲線論入門』, シュプリンガー・フェアラーク東京, 1995.

[W] André Weil, Number of solutions of equations in finite fields, Bull. Amer. Math. Soc., **55** (1949), 497-508. 1949.

第 7 章

佐藤超関数

石村隆一

7.1　一般化関数

これまで読み進んでこられた読者は，コホモロジーやホモロジーが幾何学や代数学で大変有用な “道具” であることがおわかり頂けたものと思う．このことは解析学においても同様で，この本では触れられないが，たとえば複素関数論の分野ではなくてはならない強力な “道具” になっている．多くの問題において，(コ) ホモロジーが問題を解くための強力な味方として用いられる．さて，これに対しコホモロジーそのものを実体とするような “関数” のクラスが，1960 年代の初めに日本人の数学者によって発見 (!) された．その “関数” は “超関数”，あるいは考案した数学者佐藤幹夫の名を冠して “佐藤超関数” とよばれている．

解析学において重要な研究として “関数概念の一般化” というものがある．たとえば，イギリスの物理学者ポール・ディラックの定義したデルタ “関数” を考えてみよう．n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の点 a に質量をもつデルタ関数 $\delta_a(x)$ とは，点 a 以外では 0 で，点 a においては $+\infty$ の値 (!) を持ち，かつ積分の値が $=1$ になるように “正規化” されているようなものである．

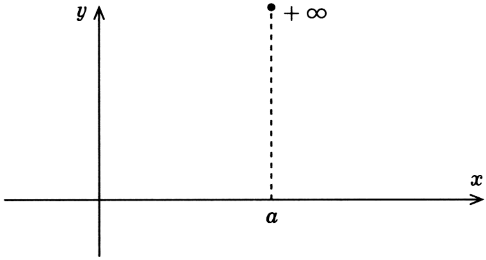


図 7.1 δ 関数

$$\delta_a(x) = \begin{cases} 0 & (x \neq a \text{ の場合}) \\ \infty & (x = a \text{ の場合}), \end{cases} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta_a(x)\, dx = 1.$$

しかし，これはすぐに気がつくように少し変である．点 a で値 $+\infty$ をとる，ということは大目に見るとしても，そのグラフと x-軸の囲む図形の面積が 1 になるというのである．しかしそれは，点 $(a, 0)$ から (a, ∞) に向かう半直線の面積，ということになるが，直線の面積は 0 である (?)．しかしデルタ関数は量子力学を始め，物理学，数学，工学等の様々な分野で利用される，現在では市民権を得た "関数" である．また，熱伝導方程式 (§8.3 例 5 参照) のような微分方程式を解く場合にも，このデルタ関数は大活躍する．

デルタ関数には，次のような原始関数が存在する．$n = 1$ のとき，ヘヴィサイド関数 $Y(x)$ を

$$Y(x) = \begin{cases} 1 & (x > 0 \text{ の場合}) \\ 0 & (x < 0 \text{ の場合}) \end{cases}$$

で定義する ($x = 0$ ではどうでもいいとしておく)．この時

$$\frac{d}{dx} Y(x) = \delta_0(x)$$

が成り立つ．しかし，$Y(x)$ は点 0 ではどう見ても微分できないし，まして定義されてさえいないのだから，その導関数がデルタ関数である，というのはますます不可解である．

しかしこうした “点に点を対応させる” という意味の関数の概念自体を拡張するのが超関数論である．ローラン・シュワルツは “テスト関数の空間” とよばれる良い性質を持った空間の双対空間として “超関数” を定式化することに成功した．(これについてはこれ以上触れられないが，様々な成書がある．特にシュワルツ氏自身による原著の和訳 [S] があるので参照されたい.) さて，佐藤幹夫氏はこのシュワルツの理論にいち早く接し，これとは別の方法で関数概念を拡張することを考案した．そこで用いられるのは関数空間の双対性の概念ではなく，古典的な複素関数の境界値，あるいはその特異性であった．

佐藤超関数は，シュワルツ超関数をすべて含み，それより広いクラスの超関数を含んでいる．また，微分方程式などでも，佐藤超関数は望ましい性質を持った，良い関数のクラスであることがわかっている．それでは，佐藤超関数を 1 変数の場合から順にみていこう．

7.2　1 変数の超関数

複素数平面 $\mathbb{C}$ の領域 Ω で定義された正則関数 (すなわち Ω の各点で複素微分できるような関数) の全体を $\mathcal{O}(\Omega)$ と書く．さて，実軸 $\mathbb{R}$ の開集合 U に対し，$\mathbb{C}$ における開集合 Ω が U の**複素近傍**であるとは，$U = \Omega \cap \mathbb{R}$ となることを言う．$\Omega - U$ の上半平面 (複素数平面の実軸より上にある部分) との共通分を Ω_+ ，下半平面との共通分を Ω_- と書くことにする．

$\mathcal{O}(\Omega - U)$ に属する関数 $f(z)$ に対し，f の Ω_+ への制限 $f_{|\Omega_+}(z)$ を $f_+(z)$, Ω_- への制限 $f_{|\Omega_-}(z)$ を $f_-(z)$ と表そう．$\mathcal{O}(\Omega - U)$ に属する関数 $f(z)$ は，$\mathcal{O}(\Omega_+)$ に属する関数 $f_+(z)$ と $\mathcal{O}(\Omega_-)$ に属する関数 $f_-(z)$ の組 (f_+, f_-) としてただ 1 通りに表され，また逆に (f_+, f_-) から f が定まる．すなわち

$$\mathcal{O}(\Omega - U) \cong \mathcal{O}(\Omega_+) \bigoplus \mathcal{O}(\Omega_-)$$

である．また，制限写像により $\mathcal{O}(\Omega) \subset \mathcal{O}(\Omega - U)$ と考えることができる．そこで，我々は $\mathcal{O}(\Omega - U)$ に属する関数 $f(z)$ は U の各点に解析接続されるとき，0 と見なすことにしたい．そのために次のように商空間を考え，それを $\mathcal{B}(U)$ と書いて，U 上の**超関数の空間**とよぶ．

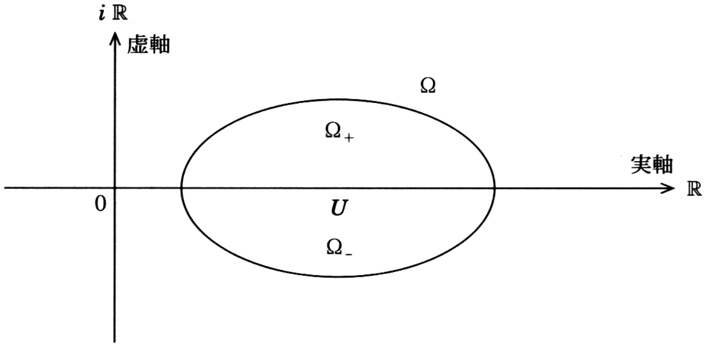


図 7.2

$$\mathcal{B}(U) := \frac{\mathcal{O}(\Omega - U)}{\mathcal{O}(\Omega)} \cong \frac{\mathcal{O}(\Omega_+) \bigoplus \mathcal{O}(\Omega_-)}{\mathcal{O}(\Omega)}.$$

したがって，U 上の超関数 $u(x)$ とはある $f(z) \in \mathcal{O}(\Omega - U)$ の同値類として $[f(z)]$ と表される．$f = (f_+, f_-)$ であるが，ここで

$$f(x + i0) := [(f_+, 0)] \quad \text{および} \quad f(x - i0) := [(0, -f_-)]$$

と書こう．すると

$$\begin{aligned} u(x) &= [(f_+, f_-)] = [(f_+, 0)] - [(0, -f_-)] \\ &= f(x + i0) - f(x - i0) \end{aligned}$$

となる．これは，超関数 $u(x)$ が正則関数 $f(z)$ の "上からの境界値" と "下からの境界値" の差として表される，ということに対応している．$f(z)$ を $u(x)$ の**定義関数**という．(定義関数はもちろんただ一つというわけではない).

超関数の演算の多くは定義関数の同種の演算として定まる．たとえば超関数の微分を

$$\frac{d}{dx} u(x) := \left[\frac{d}{dz} f(z) \right]$$

で定義する．この意味で超関数は何回でも "微分" できる．たとえば，

$$\delta_a(x) := -\frac{1}{2\pi i}\left[\frac{1}{z-a}\right] \qquad \text{(デルタ関数)}$$

$$Y(x) := -\frac{1}{2\pi i}\left[\log(-z)\right] \qquad \text{(ヘヴィサイド関数)}$$

と定めると $Y'(x) = \delta_0(x)$ となる．

次に U, V を $\mathbb{R}$ の開集合で $V \subset U$ なるようなものとしたとき，それぞれの複素近傍 Ω', Ω で $\Omega' \subset \Omega$ となるものをとる．この時，制限写像 $\mathcal{O}(\Omega - U) \longrightarrow \mathcal{O}(\Omega' - V)$ から超関数の制限写像

$$\mathcal{B}(U) = \frac{\mathcal{O}(\Omega - U)}{\mathcal{O}(\Omega)} \longrightarrow \frac{\mathcal{O}(\Omega' - V)}{\mathcal{O}(\Omega')} = \mathcal{B}(V)$$

が定まる．そこで，超関数 $u(x) \in \mathcal{B}(U)$ はこの写像によって 0 に写るとき V 上で 0 であるという．これは $u(x)$ の定義関数として V の近くで正則なものが取れる，ということを意味する．これによって，2 つの超関数 (あるいは関数) が "ある区間で一致する" ということを定義できたことになる．たとえば，上の例でヘヴィサイド関数 $Y(x)$ は $x > 0$ で値 1 をとり，$x < 0$ で 0 となることがわかり，点 a に質量を持つデルタ関数は点 $x = a$ 以外で 0 になることがわかる．

次に超関数の定積分を考えよう．$u(x) \in \mathcal{B}(U)$ は U に含まれるある有界閉区間 I の外 $U - I$ で 0 になるとしよう．この時，定義関数 $f(z)$ として $\Omega - I$ で正則なものを取ることができることが示せる．$\Omega - I$ に含まれ，I の周り

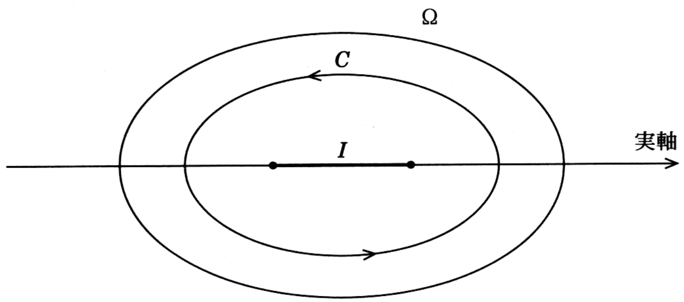


図 7.3

を時計と反対の向きに 1 周する道 C に沿っての $-f(z)$ の積分により，$u(x)$ の定積分を定義する．つまり，

$$\int u(x)\,dx := -\int_C f(z)\,dz.$$

例.　コーシーの積分公式により

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_a(x)\,dx = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{1}{z-a}\,dz = 1.$$

ここで，C は点 a の周りを時計と反対の向きに 1 周する道を表す．

以上で，最初に述べた，デルタ関数に関する性質が，デルタ関数を超関数と見ることで，すべて正当化された．

7.3　正則関数の層と層係数のコホモロジー

前節のように 1 変数の超関数は比較的簡単だ，と思われたに違いないが，多変数になるととたんに厄介になる．我々は多変数の場合も超関数を正則関数の実軸における境界値として定義したいのであるが，1 変数のときは上と下という 2 方向からの境界値しかなかったのであるが，今度は無数の方向がある．

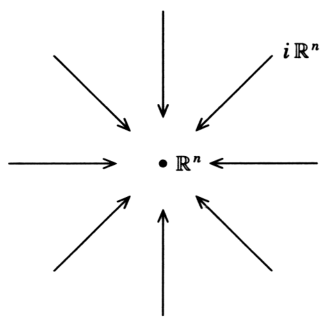


図 7.4

ここで，$\mathbb{R}^n$ および $i\mathbb{R}^n$ はそれぞれ $\mathbb{C}^n$ の実軸および虚軸を表す．さて，1

変数のときと同様 $\mathbb{C}^n$ の開集合 Ω で定義された正則関数の全体を $\mathcal{O}(\Omega)$ と表す．以下では簡単のため $\mathbb{C}^n$ を X と表そう．前節のように $\Omega' \subset \Omega$ に対し制限写像 $\mathcal{O}(\Omega) \to \mathcal{O}(\Omega')$ が与えられることも 1 変数のときと同様である．

定義． X の各開集合 Ω に対し，Ω 上の正則関数の空間 $\mathcal{O}(\Omega)$ を対応させて得られる族 $(\mathcal{O}(\Omega))_{\Omega \subset X}$ を X 上の正則関数の (芽の) **層**とよび，$\mathcal{O}_X$ と書く．

このように層を定義してしまうと少し分かりにくいのであるが，層とは 実は「X 上の各点 x の近傍で定義された正則関数を局所的に見たもの (正則関数の芽という) をすべて集めたもの」ということなのである．たとえば $\sin x$ という関数は正確にはどこで定義されているかによって同じ $\sin x$ でも別の関数と思うのであるが，1 点の近くでの状態だけに注目するときには，そのようなことは我々は忘れてしまう．ここで，“1 点の近くでの状態” とはどういうことであろう．たとえば，$y = \sin x$ を点 $x = \dfrac{\pi}{2}$ の近くで考える場合，$\sin \dfrac{\pi}{2}$ の値 1 だけでは関数 $\sin x$ についての情報はほとんど得られない．だが，点 $\dfrac{\pi}{2}$ のどんなに近くででもいいから，$\sin x$ の式やグラフが与えられていれば，我々の必要は十分満足させられる．

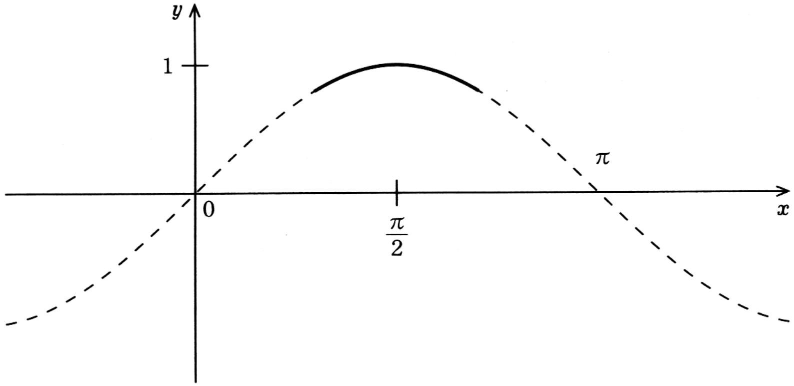


図 7.5

一般に考えてみよう．X の 1 点 a を固定する．a を含む開集合 U で定義された正則関数 $f(z)$ の，点 a (の近く) における状態だけに興味がある場合，

$f(z)$ の定義域 U はもう少し小さいものにしてもよい．つまり，$f(z)$ の定義域 U をより小さい開集合 $V \subset U$ に制限して得られる $f|_V$ と f とを同一視する．そこで点 a を含む開集合で定義された関数 f とその定義域 U を組 (f, U) として考えておき，それらの全体を $\mathcal{O}_a = \{(f, U)\}$ とする．ただし，$\mathcal{O}_a$ に属する 2 つの組 (f, U) と (g, V) に対し，空でない開集合 $W \subset U \cap V$ があって $f|_W = g|_W$ となるとき，つまり W 上で f と g が一致するとき，$(f, U) = (g, V)$ とみなすことにする．

$\mathcal{O}_a$ を点 a における**茎**（ストーク）と言い，$(f, U) \in \mathcal{O}_a$（の同値類）を，関数 f の点 a における**芽**という．関数の芽とは f の a における局所的な情報を与えたものである．

そこで，各点 a における茎 $\mathcal{O}_a$ を貼り合わせて得られる集合を $\mathcal{O}_X$ と書く．つまり，

$$\mathcal{O}_X := \bigsqcup_{a \in X} \mathcal{O}_a. = \big\{(a, f_a) \bigm| f_a \in \mathcal{O}_a,\, a \in X\big\}.$$

集合 $\mathcal{O}_X$ には任意の開集合 U とそこで定義された正則関数 $f(z)$ に対し，$\big\{(a, f_a) \bigm| a \in U\big\}$ の形の集合を開集合の基本系として得られる位相が定まる．この位相を付けて $\mathcal{O}_X$ を X 上の**正則関数の層**，という．この定義は上のものと一致する．このことを見るために層 $\mathcal{O}_X$ の切断の定義を行う．自明な写像 $\mathcal{O}_a \to \{a\}$ によって $\mathcal{O}_X$ から X の上への写像 π が定義される．逆に開集合 U から $\mathcal{O}_X$ への連続写像 $s\colon U \to \mathcal{O}_X$ で $\pi \circ s = \mathrm{id}_U$ となるものを U 上の

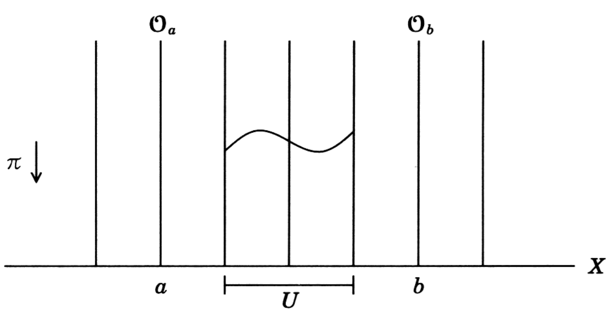


図 7.6

切断 (section) という．(切断とは何だか物騒な和訳であるが，要は U 上で $\mathcal{O}_X$ を横切るもの，というニュアンスで別に危険はない．)

U 上の切断の全体を $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ と書く．これは U 上の正則関数の全体の空間 $\mathcal{O}(U)$ と同型であることが容易に証明できる．また，層から切断の空間を定義したが，逆に層は正則関数から定義されたのであるから，層の定義は前に与えた定義と同値である．

注意.　層の定義は正則関数以外の別の関数に対してもまったく同じように定義されるし，もっと抽象的に同じ代数的構造 (たとえばアーベル群の構造) を持った空間の族 $(\mathcal{G}(U))_{U\subset X}$ として定義できる．以下では，超関数の層が定義される．

一般に X 上の層の中で，軟弱層とよばれるものが重要である．(軟弱というのも真面目な感じがしないかも知れないが，flabby (仏 flasque) の訳である．) X 上の層 $\mathcal{F}$ が**軟弱**とは任意の開集合 $U \subset X$ に対し，制限写像 $\mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(U)$ が全射なことである．単射的な層は軟弱である．さて，一般の X 上の層 $\mathcal{F}$ に対し，次のような完全系列が存在することを証明することができる．

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{L}_0 \to \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2 \to \cdots$$

ここで各 $\mathcal{L}_i$ は軟弱である．これを $\mathcal{F}$ の**軟弱分解**という．軟弱分解の取り方は一般に無数にある．上の軟弱分解から次のような切断の空間の系列が得られる．

$$0 \to \Gamma(U, \mathcal{L}_0) \to \Gamma(U, \mathcal{L}_1) \to \Gamma(U, \mathcal{L}_2) \to \cdots$$

この系列の k 次コホモロジーを $H^k(U, \mathcal{F})$ と書き，層 $\mathcal{F}$ を係数とする U 上のコホモロジーと言う．これは，軟弱分解の取り方には依らないことが示され，§5.9 で定義したものと一致する．また

$$H^0(U, \mathcal{F}) = \Gamma(U, \mathcal{F})$$

となることが容易に確かめられる．

次に，$Z \subset X$ を閉集合として切断の空間

$$\Gamma_Z(U, \mathcal{F}) := \left\{ s \in \Gamma(U, \mathcal{F}) \;\middle|\; s(z) = 0 \ (\forall z \in U - Z) \right\}$$

とおく．この時軟弱分解に対し同様に，系列

$$0 \to \Gamma_Z(U, \mathcal{L}_0) \to \Gamma_Z(U, \mathcal{L}_1) \to \Gamma_Z(U, \mathcal{L}_2) \to \cdots$$

が定義される．この系列の k 次コホモロジーを $H^k_Z(U, \mathcal{F})$ と書き，層 $\mathcal{F}$ を係数とし Z に台を持つ U 上のコホモロジーと言う．これも，軟弱分解の取り方には依らないことが示される．(もし $Z = X$ のときは $H^k_Z(U, \mathcal{F}) = H^k(U, \mathcal{F})$ である.) 一般に次のコホモロジー長完全系列が存在する．

$$\begin{aligned} 0 &\to H^0_Z(U, \mathcal{F}) \to H^0(U, \mathcal{F}) \to H^0(U - Z, \mathcal{F}) \\ &\to H^1_Z(U, \mathcal{F}) \to H^1(U, \mathcal{F}) \to H^1(U - Z, \mathcal{F}) \to \qquad (*) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\to H^k_Z(U, \mathcal{F}) \to H^k(U, \mathcal{F}) \to H^k(U - Z, \mathcal{F}) \to \cdots \end{aligned}$$

また，§4.8 で述べたように，もし，X 上の層の短完全系列 $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ が存在すれば次の長完全系列が構成できる．

$$\begin{aligned} 0 &\to H^0_Z(U, \mathcal{F}) \to H^0_Z(U, \mathcal{G}) \to H^0_Z(U, \mathcal{H}) \\ &\to H^1_Z(U, \mathcal{F}) \to H^1_Z(U, \mathcal{G}) \to H^1_Z(U, \mathcal{H}) \to \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\to H^k_Z(U, \mathcal{F}) \to H^k_Z(U, \mathcal{G}) \to H^k_Z(U, \mathcal{H}) \to \cdots \end{aligned}$$

7.4　多変数の超関数

さて，U を $\mathbb{R}^n$ の開集合として U 上の超関数の空間をともかく定義しよう．U に対し，X の開集合 Ω が複素近傍であるとは，1 変数のときと同様 $U = \Omega \cap \mathbb{R}^n$ となることである．そこで，

$$\mathcal{B}(U) := H^n_U(\Omega, \mathcal{O}_X)$$

とおいて，U 上の**超関数の空間**という．ここで，右辺のコホモロジーは U に台を持ち，層 $\mathcal{O}_X$ に係数を持つコホモロジーで，Ω にある種の条件 (擬凸性とよばれる多変数関数論の条件) があれば $n \geqq 2$ のときは $H^{n-1}(\Omega - U, \mathcal{O}_X)$ に一致し，$n = 1$ のときは $\mathcal{O}(\Omega - U)/\mathcal{O}(\Omega)$ と一致する．この最後の式は 1

変数の超関数の定義に一致する．このことを少し調べよう．$\mathcal{O}_X$ 係数のコホモロジーはいろいろとよい性質を持っている．次の定理はカルタンの定理 B とよばれるものである．(本当はもう少し一般の場合，つまり解析的連接層とよばれるものに対して成り立つ.)

定理.　Ω が擬凸のとき $k \geqq 1$ に対し，$H^k(\Omega, \mathcal{O}_X) = 0$.

これと前節の長完全系列 $(*)$ より，Ω の擬凸性の仮定のもとで，上で述べたように

$$\mathcal{B}(U) = H^n_U(\Omega, \mathcal{O}_X) \cong \begin{cases} H^{n-1}(\Omega - U, \mathcal{O}_X) & (n \geqq 2 \text{ のとき}) \\ \mathcal{O}(\Omega - U)/\mathcal{O}(\Omega) & (n = 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

が得られる．($H^0(\Omega, \mathcal{O}) = \mathcal{O}(\Omega)$, $H^0(\Omega - U, \mathcal{O}) = \mathcal{O}(\Omega - U)$ であること，および一致の定理により制限写像 $\mathcal{O}(\Omega) \to \mathcal{O}(\Omega - U)$ が単射であることに注意しよう.)

注意.　(i) $n = 1$ の時は複素平面のすべての開集合は擬凸であることが知られている．したがって，$n = 1$ に対しては上のことは無条件で成り立つ．

(ii) 今まで，超関数の定義には複素近傍 Ω が含まれているが，実は Ω の取り方に依存しないことが示される．また，任意の U に対し，擬凸な複素近傍が存在することも知られている．

(iii) 幾何学的に凸な開集合は擬凸であることが知られている．

以下簡単のために $M = \mathbb{R}^n$ とおこう．正則関数の場合と同じように超関数も層をなす．M 上の**超関数の層**を $\mathcal{B}_M := (\mathcal{B}(U))_{U \subset M}$ と書く．層 $\mathcal{B}_M$ は著しい性質を備えている．すなわち，

定理.　層 $\mathcal{B}_M$ は軟弱である．

この定理を証明するには準備が必要であるので，ここでは証明しない．これについては [KKK] 等を見ていただきたい．

7.5 被覆のコホモロジーと超関数

前節で多変数の超関数の定義を行ったが，1 変数の時と異なり定義から具体的イメージを得ることは難しい．そこで，別の方法で，層係数のコホモロジーを書き直すことを試みよう．この節では $X \subset \mathbb{C}^n$ を開集合，$M := X \cap \mathbb{R}^n$ とおく．$\mathcal{V} = (V_i)_{i\in I}$ を X の開被覆，すなわち X の開集合の族で，$\displaystyle\bigcup_{i\in I} V_i = X$ となるようなものとする．さらに，この被覆のうち添字集合 I の部分集合 I' による部分族 $\mathcal{V}' := (V_i)_{i\in I'}$ は開集合 $X - M$ の開被覆になっているとする．さて，記号を簡単にするため以下の簡略記法を用いる．

$$V_{i_0,i_1,\cdots,i_k} := V_{i_0} \cap V_{i_1} \cap \cdots \cap V_{i_k}.$$

そこで，次のようなコチェイン複体を考えよう．簡単のため，添字 $(i_0, i_1,\cdots, i_k)$ を $\mathbf{i}$ と書く．(このような $\mathbf{i}$ を**多重添字**という.)

$$C^k(\mathcal{V}) := \left\{ \psi = (\psi_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i}\in I^{k+1}} \;\middle|\; \begin{array}{l} \psi_{\mathbf{i}} \in \mathcal{O}(V_{\mathbf{i}}) \text{ で,} \\ \text{任意の添字の互換 } \tau \text{ に対し } \psi_{\tau(\mathbf{i})} = -\psi_{\mathbf{i}} \end{array} \right\}$$

$$C^k(\mathcal{V}, \mathcal{V}') := \left\{ \psi = (\psi_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i}\in I^{k+1}} \in C^k(\mathcal{V}) \;\middle|\; \mathbf{i} \in I'^{k+1} \text{ ならば } \psi_{\mathbf{i}} = 0 \right\}.$$

双対境界作用素 $\delta_k\colon C^k(\mathcal{V}) \to C^{k+1}(\mathcal{V})$ は次のように定義する．

$$(\delta\psi)_{i_0,i_1,\cdots,i_{k+1}} := \sum_{l=0}^{k+1} (-1)^l \psi_{i_0,\cdots,i_{l-1},i_{l+1},\cdots,i_{k+1}}|_{V_{i_0,i_1,\cdots,i_{k+1}}}.$$

これによって，コホモロジー複体

$$C^*(\mathcal{V}):\ 0 \to C^0(\mathcal{V}) \xrightarrow{\delta_0} C^1(\mathcal{V}) \xrightarrow{\delta_1} \cdots \xrightarrow{\delta_{k-1}} C^k(\mathcal{V}) \xrightarrow{\delta_k} \cdots$$

が得られた．この複体に対する k 次コホモロジー群を

$$H^k(\mathcal{V}) := H^k(C^k(\mathcal{V}))$$

と書くことにする．また，

$$C^*(\mathcal{V}, \mathcal{V}'):\ 0 \to C^0(\mathcal{V}, \mathcal{V}') \xrightarrow{\delta_0} C^1(\mathcal{V}, \mathcal{V}') \xrightarrow{\delta_1} \cdots \xrightarrow{\delta_{k-1}} C^k(\mathcal{V}, \mathcal{V}') \xrightarrow{\delta_k} \cdots$$

もコホモロジー複体になる．この k 次コホモロジー群を

$$H^k(\mathcal{V}, \mathcal{V}') := H^k(C^k(\mathcal{V}, \mathcal{V}'))$$

と書く．さて系列

$$0 \to C^*(\mathcal{V}, \mathcal{V}') \to C^*(\mathcal{V}) \to C^*(\mathcal{V}') \to 0$$

は完全であるから，次の長完全系列も得られる．

$$\begin{aligned} 0 &\to H^0(\mathcal{V}, \mathcal{V}') \to H^0(\mathcal{V}) \to H^0(\mathcal{V}') \\ &\to H^1(\mathcal{V}, \mathcal{V}') \to H^1(\mathcal{V}) \to H^1(\mathcal{V}') \to \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\to H^k(\mathcal{V}, \mathcal{V}') \to H^k(\mathcal{V}) \to H^k(\mathcal{V}') \to \cdots \end{aligned}$$

$H^k(\mathcal{V})$ や $H^k(\mathcal{V}, \mathcal{V}')$ を**チェックコホモロジー**という．ある条件下に，チェックコホモロジー $H^k(\mathcal{V})$ は，層係数のコホモロジーと一致する．つまり，

定理.　すべての $l \geqq 1$ とすべての $i_0, i_1, \cdots, i_p \in I$ に対し

$$H^l(V_{i_0, i_1, \cdots, i_p}, \mathcal{O}) = 0$$

であれば，すべての $k \geqq 0$ に対して

$$H^k(X, \mathcal{O}_X) \cong H^k(\mathcal{V}).$$

定理は $\mathcal{V}'$ に対しても成り立つから，上の長完全系列と前節の層係数のコホモロジーに対する長完全系列から次の定理を得る．

定理.　すべての $l \geqq 1$ とすべての $i_0, i_1, \cdots, i_p \in I$ に対し

$$H^l(V_{i_0, i_1, \cdots, i_p}, \mathcal{O}) = 0$$

であれば，すべての $k \geqq 0$ に対して

$$H^k_M(X, \mathcal{O}_X) \cong H^k(\mathcal{V}, \mathcal{V}').$$

さて，前節で我々は領域の "擬凸性" という概念に触れた．一般に擬凸開集合の有限個の共通分はまた擬凸になることも知られている．したがって，開被覆 $\mathcal{V} = (V_i)_{i \in I}$ として，各 V_i が擬凸なものを考えれば定理の条件はいつも成

り立つことになり，層 $\mathcal{O}$-係数のコホモロジーは (擬凸な) 開被覆のコホモロジーと無条件で一致することになる．このようにして，層 $\mathcal{O}$-係数のコホモロジーとして定義した，多変数の超関数を被覆のコホモロジーの言葉で書き直してみよう．以下では X 自身擬凸とする．

$\varepsilon = \pm 1$ として，$l = 1, 2, \cdots, n$ に対し，開集合

$$V_{l,\varepsilon} := \left\{(z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n \;\middle|\; \varepsilon \operatorname{Im} z_l > 0\right\}$$

を考える．これは，もちろん凸開集合であるから擬凸である．$V_{l,\varepsilon} \cap X$ の全体からなる開被覆 $\mathcal{V}' = (V_{l,\varepsilon} \cap X)$ を考える．これは明らかに $X - M$ の擬凸開被覆である．またさらに，$\mathcal{V} := (V_{l,\varepsilon} \cap X, X)$ は X の擬凸開被覆である．

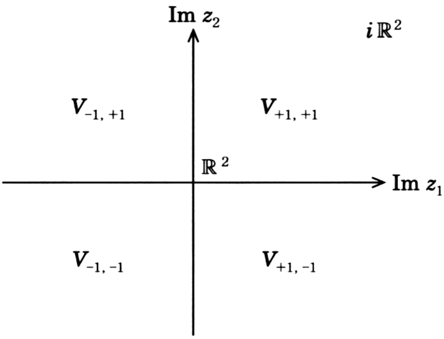


図 7.7

以下では $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ (各 ε_l は 1 または -1) として，

$$V_\varepsilon := V_{1,\varepsilon_1} \cap V_{2,\varepsilon_2} \cap \cdots \cap V_{n,\varepsilon_n} \cap X$$

とおく．(これは，X の第 ε-象限である.) さて，

$$\mathcal{B}(M) = H^n_M(X, \mathcal{O}_X) = H^n(\mathcal{V}, \mathcal{V}')$$

であるが，チェックコホモロジーの定義から

$$H^n(\mathcal{V}, \mathcal{V}') = H^n(C^*(\mathcal{V}, \mathcal{V}')) = \frac{\operatorname{Ker}\left(\delta\colon C^n(\mathcal{V}, \mathcal{V}') \to C^{n+1}(\mathcal{V}, \mathcal{V}')\right)}{\operatorname{Im}\left(\delta\colon C^{n-1}(\mathcal{V}, \mathcal{V}') \to C^n(\mathcal{V}, \mathcal{V}')\right)}.$$

明らかに,

$$C^{n+1}(\mathcal{V},\mathcal{V}')=0$$

である. また,

$$C^n(\mathcal{V},\mathcal{V}')\cong\bigoplus_{\varepsilon\in\{\pm1\}^n}\mathcal{O}(V_\varepsilon)$$

であることも明らかである. さらに $\varepsilon(k)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_{k-1},\varepsilon_{k+1},\cdots,\varepsilon_n)\in\{\pm1\}^{n-1}$ として,

$$V_{\varepsilon(k)}(k):=V_{1,\varepsilon_1}\cap V_{2,\varepsilon_2}\cap\cdots\cap V_{k-1,\varepsilon_{k-1}}\cap V_{k+1,\varepsilon_{k+1}}\cap\cdots\cap V_{n,\varepsilon_n}\cap X$$

とおけば

$$C^{n-1}(\mathcal{V},\mathcal{V}')\cong\bigoplus_{k=1}^n\bigoplus_{\varepsilon(k)\in\{\pm1\}^{n-1}}\mathcal{O}(V_{\varepsilon(k)}(k))$$

となる. そこで,

$$G=(g_{\varepsilon(k),k})\in C^{n-1}(\mathcal{V},\mathcal{V}')=\bigoplus_{k=1}^n\bigoplus_{\varepsilon(k)\in\{\pm1\}^{n-1}}\mathcal{O}(V_{\varepsilon(k)}(k))$$

に対して

$$(\delta G)_\varepsilon=\sum_{k=1}^n(-1)^k g_{\varepsilon(k),k}$$

と計算される. 結局, M 上の超関数は第 ε-象限の正則関数の組よりなる定義関数

$$F=(f_\varepsilon)_{\varepsilon\in\{\pm1\}^n}\in\bigoplus_{\varepsilon\in\{\pm1\}^n}\mathcal{O}(V_\varepsilon)$$

により上の形の元を法として, 定義されることがわかる.

注意.　ここで, 述べた定義関数の取り方, その定義域はまったくただ一通りではなく, その方法は無数にあることに注意しよう. たとえば, $\mathbb{R}^n$ の $n+1$ 個のベクトルの組 $(\eta_0,\eta_1,\cdots,\eta_n)$ でその 1 次結合の全体が全空間 $\mathbb{R}^n$ になるようなものを任意に取って, 各 η_j に関し正の方向に属する点のなす半空間を

$$H_{\eta_j} := \left\{ z = (z_1, z_2, \cdots, z_n) \;\middle|\; \mathrm{Re}\, z \cdot \eta_j > 0 \right\}$$

とする．

$$V_j := H_{\eta_j} \cap X$$

とおいて被覆 $\mathcal{V}' := (V_j)_j$ を考えれば，これは $X - M$ の擬凸な開被覆であり，さらに $\mathcal{V} := (X, V_0, V_1, \cdots, V_n)$ は X の擬凸な開被覆である．そこで，上と同様にして，

$$\mathcal{B}(M) = H^n_M(X, \mathcal{O}_X) = H^n(\mathcal{V}, \mathcal{V}')$$

となり，さらに右辺を計算すれば，$U_j := \bigcap_{l \neq j} V_l$, $U_{j,k} := \bigcap_{l \neq k,j} V_l$ とおいて

$$\mathcal{B}(M) \cong \frac{\bigoplus_j \mathcal{O}(U_j)}{\delta\left(\bigoplus'_{j,k} \mathcal{O}(U_{j,k})\right)}$$

となる．ただし，ここで $\bigoplus'_{j,k}$ は交代和をあらわす．(詳しくは [KKK] を参照)．

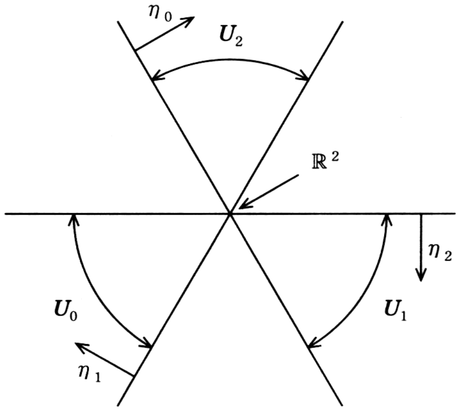


図 7.8 $n = 2$ のときの図

超関数が定義関数で表されることがわかったので，我々は 1 変数の時と同様に，超関数に様々の演算を導入できる．たとえば，超関数の微分は定義関数の

対応する (複素) 微分により定義できるし，超関数と解析関数のかけ算も，超関数同士の足し算も，定義関数を考えることで容易に定義できる．これらが，定義関数やその定義域の取り方に依存しないことも確かめられる．

7.6　多変数の超関数の例

さて，そこで前節のように ε-象限における正則関数の境界値と考えて，我々は具体的な多変数の超関数の例を考察することができる．この場合任意の超関数 $u(x)$ は定義関数

$$F = (f_\varepsilon)_{\varepsilon\in\{\pm1\}^n} \in \bigoplus_{\varepsilon\in\{\pm1\}^n} \mathcal{O}(V_\varepsilon)$$

を持つのであるが，ここで各 f_ε により決まる超関数を 1 変数の時と同様に

$$f_\varepsilon(x + i\varepsilon 0)$$

と言う記号で書くことにすれば

$$u(x) = \sum_{\varepsilon\in\{\pm1\}^n} f_\varepsilon(x + i\varepsilon 0)$$

となる．

たとえば $a \in \mathbb{R}^n$ に質量を持つデルタ関数を，多変数の場合に

$$\delta_a(x) := \frac{1}{(-2\pi i)^n} \times \sum_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\in\{\pm1\}^n} \prod_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon_k}{((x_k - a_k) + i\varepsilon_k 0)}$$

と定義する．したがって，特に $n = 2,\ a = 0$ の場合は

$$\delta_0(x,y) = \frac{1}{(-2\pi i)^2}\left[\frac{1}{(x+i0)(y+i0)} - \frac{1}{(x+i0)(y-i0)} \right. \\ \left. - \frac{1}{(x-i0)(y+i0)} + \frac{1}{(x-i0)(y-i0)}\right]$$

となる．

次に微分してみよう．記号を簡略化するためにシュワルツに倣って次のよう

な記法を準備しよう．$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, \cdots\}$ とし，$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$, $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ とする．多重添字 α に対して，

$$
\begin{aligned}
&|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n, \\
&\alpha! := \alpha_1!\alpha_2! \cdots \alpha_n!, \\
&x^\alpha := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}, \\
&F^{(\alpha)}(x) = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} F(x) := \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} F(x)
\end{aligned}
$$

と書くことにする．この記号は多変数関数では，よく使われる．この時

$$
\delta_a^{(\alpha)}(x) = (-1)^{|\alpha|} \frac{\alpha!}{(-2\pi i)^n} \times \sum_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n) \in \{\pm 1\}^n} \prod_{k=1}^n \frac{\varepsilon_k}{((x_k - a_k) + i\varepsilon_k 0)^{\alpha_k + 1}}
$$

を得る．これは，超関数の微分を，1 変数の時と同様に，各定義関数の微分と定義することにすれば容易に得られるであろう．

7.7 環の層 $\mathfrak{D}_X$

この節では，次章への準備として，微分作用素の成す層 $\mathfrak{D}_X$ について触れておく．$X \subset \mathbb{C}^n$ は開集合として，X 上の m 階線形微分作用素とは

$$
P(z, D_z) := \sum_{|\alpha| \leqq m} a_\alpha(z) D_z^\alpha
$$

の形の作用素のことを言う．ここで，α は多重添字であり，各 α に対し $a_\alpha(z)$ は X 上の正則関数を表す．また，D_z は微分するという操作を表し，関数に働くことによって初めて意味があるのであるが，ここでは微分すること自体に注目し “作用素” として形式的に取り扱う．すなわち

$$
D_z^\alpha F(z) := F^{(\alpha)}(z)
$$

である．そこで，このような微分作用素の全体を $\mathfrak{D}(X)$ と書く．

$$
\mathfrak{D}(X) := \left\{ P(z, D_z) = \sum_{|\alpha| \leqq m} a_\alpha(z) D_z^\alpha \;\middle|\; a_\alpha(z) \in \mathcal{O}(X),\ m \in \mathbb{N}_0 \right\}.
$$

この空間が，微分作用素同士の和を，係数 $a_\alpha(z)$ の和，と定義することで加群になることはすぐに確かめられる．さらに，$P = P(z, D_z)$, $Q = Q(z, D_z) \in \mathcal{D}_X$ に対し，合成 $Q \circ P$ によって "積" の構造が入る．ただし，

$$(Q \circ P)F(z) := Q(z, D_z)(P(z, D_z)F(z))$$

である．容易に確かめられるように，これらにより空間 $\mathcal{D}(X)$ は (非可換な) 環の構造を持つことがわかる．この環 $\mathcal{D}(X)$ の任意の元は正則関数に作用することは明らかであるが，前節の結果から (実軸 M に制限して考えれば) また超関数にも作用する．このことを，環 $\mathcal{D}(X)$ が $\mathcal{O}(X)$ および (M に制限して) $\mathcal{B}(M)$ に作用するという．

さて，我々は，環 $\mathcal{D}(X)$ から微分作用素の層

$$\mathcal{D}_X := (\mathcal{D}(U))_{U \subset X}$$

を定義する．次章で考える $\mathcal{D}$-加群の理論こそは微分方程式系を統一的に考え，議論を代数的に捉えることで見通しをよくし，現代の微分方程式論になくてはならない理論的支柱となっているもので，解析学を代数的手法で研究する**代数解析学**の代表的な分野となっている．

そこでは，関数や超関数のみならず微分方程式系自体をコホモロジー的に取り扱い，様々な深い結果が得られている．具体的な説明は次章に譲るが，まず微分方程式系は (左連接的) $\mathcal{D}_X$-加群 $\mathcal{M}$ として捉えられ，また解の層は準同型加群

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)$$

または

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_M}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_M)$$

により与えられる．解の接続等も含め，この層の高次のコホモロジーまで含めて考察することにより，より深く詳しく解と方程式系そのものの構造を知ることが可能になる．

超関数論および $\mathcal{D}$-加群の理論を含め，現代の解析学においてもコホモロジー理論がなくてはならない "道具" であることがおわかり頂けるかと思う．

これらの考察をさらに深めるためには，議論を "導来圏" において考察することが重要であることは，代数幾何学だけでなく代数解析学においても同様である．これらについてはここで述べることはできないが，たとえば [KKK], [K] 等の文献を参照していただきたい．

参考文献

[K] 金子晃『超函数入門』，東京大学出版会，1982.

[KKK] 柏原正樹，河合隆裕，木村達雄『代数解析学の基礎』，紀伊國屋書店，1980.

[M] 森本光生『佐藤超函数入門』，共立出版，1976.

[S] ローラン・シュワルツ (岩村，石垣，鈴木訳)『超函数の理論』，岩波書店，1971.

第 8 章

$\mathfrak{D}$-加群とコホモロジー

岡田靖則

8.1 はじめに

この章では，$\mathfrak{D}$-加群という概念と，そのある種のコホモロジーについて説明したいと思う．

$\mathfrak{D}$-加群というのは大まかに言えば連立の線形微分方程式の代数的性質を取り出したようなもの，もっと大胆になれば,「線形偏微分方程式そのもの」と言ってもよいであろう．

前半では，そもそも微分方程式とはどんなものかについて，数学の発展の中で微分方程式というのが現れたころに立ち返って説明していき，後半では，いくつかの簡単な微分方程式について対応する $\mathfrak{D}$-加群を調べると共に，$\mathfrak{D}$-加群に対してコホモロジーを取る操作が微分方程式のどんな情報を抽出しているのかについて，説明していきたいと思う．

そもそも微分方程式というものが現れるのは 17 世紀で，地上を自由落下する物体や惑星の運動などを記述する運動方程式として登場する．これは，時刻 t での物体の位置を $u(t)$ としたときの，関数 $u(t)$ の満たすべき条件で，一般には連立の常微分方程式となる．その後，常微分方程式，あるいは偏微分方程式が，力学のみならず，さまざまな分野に応用されるようになっている．

8.2 ニュートンの力学

リンゴが落ちるのを見て万有引力を発見したニュートン．このエピソードの真偽はさておき，今日彼の名を冠してよばれるニュートン力学では，物体は運動方程式という常微分方程式を満たすように動く，とされている．

時刻 t における直線運動をする物体の位置 (数直線上の座標) を $u(t)$ としたとき，$v(t) = u'(t)$ は速度，$a(t) = v'(t) = u''(t)$ は加速度とよばれる．この物体の質量を m，この物体にかかる力を F とすると，運動方程式は $F = ma$ と書かれる．力 F が t, u, u' の関数 $F(t, u, u')$ であるとき，これは 2 階の常微分方程式

$$u'' = \frac{1}{m}F(t, u, u') \tag{8.1}$$

となる (直線運動でない場合には u, F 等はベクトルになるので，連立方程式となる)．また

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = \dfrac{1}{m}F(t, u, v) \end{cases} \tag{8.2}$$

と書き直して 1 階の連立常微分方程式と考えることもある．これら 2 つの方程式 (8.1) と (8.2) はまったく同値な方程式であることは，簡単に納得できることと思う．

例 1. (自由落下運動). 地表近くの物体が，重力によって自由落下するとき，時刻 t における物体の地表からの高さを $u(t)$ とすると．空気抵抗などを無視すると，$u''(t) = -g$ (g は重力加速度) が成り立つ．この解は，

$$u(t) = C_1 + C_2 t - \frac{g}{2}t^2$$

と書ける．ここで，$C_1 = u(0)$, $C_2 = u'(0)$ は $t = 0$ での位置 (初期位置) と速度 (初期速度) を表す．解に現れる任意定数は C_1, C_2 の 2 個なので，このことを，**解の自由度**が 2 であると言う．

例 2. (スピードに比例した空気抵抗). 落下する物体において，空気抵抗を

無視せずに考慮し，それがスピードに比例していると考えた場合，方程式は，

$$u'' = -b - au'$$

となり，解は，

$$u(t) = -\frac{b}{a}t + C_1 + \frac{b + aC_2}{a^2}\left(1 - e^{-at}\right)$$

で，$C_1 = u(0)$, $C_2 = u'(0)$ はやはり初期位置と初期速度となる．解の形は例 1 と異なるが，やはり，解の自由度は 2 である．

例 3. (バネにぶらさげた物体).　つりあった位置からの時刻 t におけるバネの伸びを $u(t)$ とすると，$F = -ku$ となる．k はバネによって決まる定数 (バネ定数) である．したがって方程式は，

$$u'' = -\frac{k}{m}u$$

であり，解は，$\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ として

$$u(t) = C_1 \cos(\omega t) + \frac{C_2}{\omega}\sin(\omega t)$$

となる． $C_1 = u(0)$, $C_2 = u'(0)$ はやはり初期位置と初期速度で，解の自由度は 2 である．この場合，解の集合

$$\left\{u(t) \;\middle|\; u''(t) = -g\right\} = \left\{C_1\cos(\omega t) + \frac{C_2}{\omega}\sin(\omega t) \;\middle|\; C_1, C_2 \in \mathbb{R}\right\}$$

は 2 次元のベクトル空間である．このように，斉次微分方程式の解の集合はベクトル空間になるので，このとき，解の集合を**解空間**ともいう．

8.3　数理物理の偏微分方程式

偏微分方程式の場合，一般解の表示はもちろん，それが物理現象を表しているとしても方程式の説明自体が難しいので，簡単な例をいくつか挙げるにとどめる．ただし，2 変数の 2 階偏微分方程式で大切なのは，次の 3 つの例である．

例 4. (波動方程式). ひもや弦，直線上を直進する音や光などにおいて，時刻 t，位置 x における波の高さ (変位) を $u(t,\,x)$ とすると，次の方程式が成り立つ．

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}.$$

ただし，c は正の定数で波の伝わる速さを表し，u_{tt}, u_{xx} は関数 u をそれぞれ t, x に関して 2 回偏微分して得られる偏導関数を表す．これを，1 次元の波動方程式という．

この方程式の一般解は，f, g を 1 変数の任意の関数として，

$$u(t,x) = f(x-ct) + g(x+ct)$$

となる．両端が固定された弦の振動の場合のように，$u(t,0) = u(t,\pi) = 0$ という条件を課すと解は

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin nx \cos nct + b_n \sin nx \sin nct) \quad (a_n,\, b_n \in \mathbb{R})$$

という形に書ける．これは，フーリエ級数の理論の出発点でもある．

例 5. (熱方程式). 直線状の細い棒があり，時刻 t，位置 x における棒の温度を $u(t,\,x)$ とすると，次の方程式が成り立つ．

$$u_t = k u_{xx}.$$

ただし，k は棒の熱伝導率から定まる正の定数で，u_t は関数 u を t に関して 1 回偏微分して得られる偏導関数を表す．この方程式を，1 次元の熱 (伝導) 方程式とか，拡散方程式という．簡単のため $k=1$ として解けば，$-\infty < x < \infty$ で $u(0,\,x) = f(x)$ ($f(x)$ は適当な条件を満たすとする) の場合，この方程式の解は，

$$u(t,x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}\, dy$$

で与えられる．ここでは，フーリエ変換の理論が活躍する．また，この方程式では，$u(0,\,x) = \delta(x)$ を満たす解を見つけることが大切になる．ここで，$\delta(x)$

は第 7 章で説明したディラックのデルタ関数である．

また，$0 \leqq x \leqq \pi$, $u(t, 0) = u(t, \pi) = 0$ の場合には，熱方程式の解は，

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2 t} \sin nx \quad (a_n \in \mathbb{R})$$

と書ける．

例 6. (ラプラス方程式).　未知関数を $u(x, y)$ として，偏微分方程式

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

を，2 変数のラプラス方程式という．これは，1 変数複素正則関数の実部や虚部が満たす微分方程式である．一般に，ラプラス方程式の解を**調和関数**という．物理現象ではポテンシャルと関係する．

1 変数関数 $u(t)$ の導関数を $u'(t)$ と表したが，$u'(t)$ は $\dfrac{du}{dt}$ とか $Du(t)$ などとも書く．u' をもう一度 t で微分して得られる関数を $u''(t)$ とか $\dfrac{d^2u}{dt^2}$ とか $D^2u(t)$ などと書く．高校の教科書では使わないが，微分方程式では，$D^k u(t)$ という書き方が役に立つ．

2 変数関数 $u(t, x)$ の場合，x を定数として考え変数 t について微分した関数を u の t による**偏導関数**といい，$u_t(t, x)$ とか $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ とか $D_t u(t, x)$ と書く．u_t を x で偏微分して得られる 2 階偏導関数を u_{tx} とか $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}$ とか $D_x D_t u(t, x)$ と書く．偏微分方程式では，$D_t^2 u$ とか $D_t D_x u$ という書き方が役に立つ．

すると，自由落下運動の方程式は $D^2 u = -g$，空気抵抗つきだと $(D^2 + aD)u = -b$，波動方程式は $(D_t^2 - c^2 D_x^2)u = 0$，熱方程式は $(D_t - kD_x^2)u = 0$ とかける．

8.4　典型的な常微分方程式

常微分方程式の典型として，定数係数線形常微分方程式とオイラー型常微分方程式の 2 種類を見てみよう．まず，微分演算子 D を用いた計算に慣れてお

こう．D を $\dfrac{d}{dt}$ と書き直せば，以下は高校で習う内容である．

使う公式.

種類	関数	導関数
単項式，べき関数など	1	$D1 = 0$
	t	$Dt = 1$
	t^2	$Dt^2 = 2t$
	t^α	$Dt^\alpha = \alpha t^{\alpha-1}$
指数関数	e^t	$De^t = e^t$
	$e^{\alpha t}$	$De^{\alpha t} = \alpha e^t$
対数関数	$\log t$	$D\log t = \dfrac{1}{t}$
積の微分法	$f \times g$	$D(fg) = (Df)g + f(Dg)$

公式を用いた計算例.　次のような計算は公式から直接得られる．

$$D(3t^2) = 3Dt^2 = 6t$$
$$(D-1)(e^{2t}) = De^{2t} - e^{2t} = 2e^{2t} - e^{2t} = e^{2t}$$
$$D(te^t) = (Dt)e^t + t(De^t) = e^t + te^t = (t+1)e^t$$
$$(tD)t^3 = t(Dt^3) = t(3t^2) = 3t^3$$
$$(t^2D^2 - 2)t^2 = t^2(D^2t^2) - 2t^2 = 2t^2 - 2t^2 = 0$$

また，$f(t)$ を与えられた微分可能な関数として，

$$D(e^{\alpha t}f(t)) = (De^{\alpha t})f(t) + e^{\alpha t}(Df(t)) = e^{\alpha t}(D+\alpha)f(t)$$
$$tD(t^\alpha f(t)) = (tDt^\alpha)f(t) + t^\alpha(tDf(t)) = t^\alpha(tD+\alpha)f(t)$$

等の計算も積の微分法を用いて公式から導かれる．

定数係数の線形方程式.　定数係数の方程式では，指数関数が大きな役割を果たす．

例 7. (定数係数の 1 階斉次方程式).　微分方程式 $(D-\alpha)u = 0$ (α は定数) を考える．$u = e^{\alpha t}$ はひとつの解である．その定数倍もすべて解だから，

$$u(t) = C_1 e^{\alpha t} \tag{8.3}$$

は解となる．これ以外の解がないことは，次のように確かめられる．$u(t) = e^{\alpha t} v(t)$ とおいて方程式に代入し，積の微分法を用いて計算すると，

$$(D - \alpha)(e^{\alpha t} v) = e^{\alpha t} Dv = 0$$

となる．すなわち $Dv = 0$ であり，この解は $v = C_1$ (定数) なので，(8.3) 以外に解はない．

例 8. (定数係数の 1 階非斉次方程式). $(D - \alpha)u = e^{\beta t}$ を解くには，$u = e^{\alpha t} v$ とおいて，

$$(D - \alpha)(e^{\alpha t} v) = e^{\alpha t} Dv = e^{\beta t},$$

すなわち，$Dv = e^{(\beta - \alpha)t}$ という計算から，

$$u(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta - \alpha} e^{\beta t} + C_1 e^{\alpha t} & (\alpha \neq \beta \text{ のとき}) \\ t e^{\alpha t} + C_1 e^{\alpha t} & (\alpha = \beta \text{ のとき}) \end{cases}$$

が解であることがわかる．

例 9. (定数係数の 2 階斉次方程式). $(D^2 + aD + b)u = 0$ を解くには，2 次方程式 $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ の 2 つの解を α, β とすると，

$$(D - \alpha)(D - \beta)u = 0$$

となるので，1 階の方程式を順に解くことに帰着される．結局，解は，

$$u(t) = \begin{cases} C_1 e^{\alpha t} + C_2 e^{\beta t} & (\alpha \neq \beta \text{ のとき}) \\ (C_1 + C_2 t) e^{\alpha t} & (\alpha = \beta \text{ のとき}) \end{cases}$$

であることがわかる．ここで，$a, b \in \mathbb{C}$, $u(t)$ は複素 (正則) 関数として考える．

実は，定数係数の場合，次のことが知られている．

- m 階の方程式 $Pu = 0$ は，必ず指数関数×多項式という形の解を独立に m 個持つ．つまり解の自由度は m.
- $Pu = f(t)$ は必ず解を持ち，この場合も自由度は m.

オイラー型の方程式. オイラー型の方程式では，べき関数が大きな役割を果たす.

例 10. (オイラー型の 1 階斉次方程式). $(tD-\alpha)u=0$ を解く．まず $t>0$ の範囲で考え，$u=t^\alpha v$ とおけば $(tD-\alpha)(t^\alpha v)=t^\alpha(tDv)=0$ となるので，$u=C_1t^\alpha$ が解となる．$t<0$ でも同様である．(α が整数でないとき，$t<0$ では t^α の代わりに $(-t)^\alpha$ を考えればよい．)

$t=0$ のまわりで解を考えると，α の値によって t^α が $t=0$ の近くで定義されなかったり微分できなかったりすることがあり得るので，たとえば解析的な関数のみを考える場合，

・ α が 0 以上の整数 n なら，$u=C_1t^n$.

・ $\alpha\neq 0, 1, 2, \cdots$ なら，$u=0$.

となる．つまり，$t=0$ の外では常に任意定数 1 個分の解があるが，$t=0$ では α 次第で状況が少し変わる，ということになる.

例 11. (オイラー型の 1 階非斉次方程式). $(tD-\alpha)u=t^n$, $(n=0, 1, 2, \cdots)$ を解く．まず $t>0$ で考えよう．$u=t^\alpha v$ とおくと，$(tD-\alpha)(t^\alpha v)=t^\alpha(tDv)=t^n$，すなわち $Dv=t^{n-\alpha-1}$ なので，$\alpha\neq n$ なら $u=\dfrac{1}{n-\alpha}t^n+C_1t^\alpha$ が解，$\alpha=n$ なら $u=t^n\log t+C_1t^n$ が解となる．$t=0$ の近くでの解析的な解を考えることにすると，

・ $\alpha\neq 0, 1, 2, \cdots$ なら，右辺のどんな n に対しても解がある.

・ α が 0 以上の整数なら，右辺の n が α に等しいときに解けない.

となる．つまり，$t=0$ の外では常に解けるが，$t=0$ では α 次第で状況が少し変わる，ということになる.

例 12. (オイラー型の 2 階斉次方程式). $(t^2D^2+atD+b)u=0$ を解く.

$$(tD-\alpha)(tD-\beta)u=(tD-\alpha)(tu'-\beta u)=t^2u''-(\alpha+\beta-1)tu'+\alpha\beta u$$

だから，2 次方程式 $\lambda^2+(a-1)\lambda+b=0$ の 2 つの解を α, β とすると，

$$(tD-\alpha)(tD-\beta)u=0$$

となる．したがって，オイラー型の 1 階の方程式に帰着され，解は，

$$u(t) = \begin{cases} C_1 t^\alpha + C_2 t^\beta & (\alpha \neq \beta \text{ のとき}) \\ C_1 t^\alpha + C_2 t^\alpha \log t & (\alpha = \beta \text{ のとき}) \end{cases}$$

となる．どちらの場合でも $t > 0$ では解空間は 2 次元であるが，$t = 0$ では α, β がどんな値かによって状況が変わる．

実は，オイラー型の場合，次のことが知られている．

・ m 階の方程式は，$t > 0$ で考えれば必ずべき関数× (対数関数のべき) という形の解を独立に m 個持つ．しかし，$t = 0$ の近くまで伸びているかどうかは，方程式によって異なる．

・ $t = 0$ では，m 階の方程式 $Pu = 0$ が 0 以外の解析的な解をもたないことと，$Pu = f(t)$ がどんな解析的な $f(t)$ に対しても解析的な解を持つこととが同値になる．

8.5 𝔇-加群

§8.4 で，定数係数の方程式とオイラー型の方程式について，例を調べた．定数係数の常微分方程式のように方程式が変わっても解の様子はあまり変わらないこともあるし，オイラー型のように方程式が同じでも解を考える範囲によって解の様子が変わってしまうこともある．

線形の微分方程式 (常微分方程式だけでなく，偏微分方程式も) は，未知関数の線形微分作用素による変換で，別の方程式に同値変形され得る．このときに不変な性質を抽出したのが 𝔇-加群とよばれるもので，𝔇-加群に対して，関数の空間を用いてコホモロジーを取ることは，具体的な解の属する空間を指定して方程式を解くことに相当する．

常微分方程式の $(D - \alpha)$, $(D^2 + aD + b)$, $(tD - \alpha)$, $(t^2 D^2 + atD + b)$ などの部分や，偏微分方程式の $(D_t - kD_x^2)$, $(D_t^2 - c^2 D_x^2)$ などを**微分作用素**とよぶ．一般には，線形微分作用素は，常微分方程式の場合

$$\begin{aligned} P(t, D) &= \sum_{j=0}^{m} a_j(t) D^{m-j} \qquad (8.4) \\ &= a_0(t) D^m + a_1(t) D^{m-1} + \cdots + a_{m-1}(t) D + a_m(t) \end{aligned}$$

のように表される．ただし，係数 $a_j(t)$ は $\mathbb{C}$ のある空でない開集合 U 上で正則な複素関数とする．

2 変数の偏微分方程式の場合，独立変数を x, y とすれば，

$$P(x, y, D_x, D_y) = \sum_{j,k} a_{j,k}(x, y) D_x^j D_y^k$$

(和 $\sum_{j,k}$ は有限和) のように表される．ただし，係数 $a_{j,k}(x, y)$ は $\mathbb{C}^2$ の開集合 U 上で正則な関数とする．このような $P(t,\ D)$, $P(x,\ y,\ D_x,\ D_y)$ を U 上の**正則微分作用素**とよぶ．

U 上の正則微分作用素全体の集合を $\mathfrak{D}(U)$ とする．以下で述べるように，$\mathfrak{D}(U)$ は (非可換) 環になる．$X = \mathbb{C}^n$ (または，一般に X は複素多様体) について，X の開集合 U に環 $\mathfrak{D}(U)$ を対応させることにより，(非可換) 環の層 $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_X$ が定義される (§7.7 参照)．ただし，$\mathfrak{D}(U)$ における積は次のように定義される．

微分作用素の積． 2 つの微分作用素 P, Q の積は，任意の関数 f に対して

$$(PQ)f = P(Qf)$$

として定められる．次の例 14 からわかるように，交換法則 $PQ = QP$ は必ずしも成り立たない．

例 13．(定数係数作用素の積)． 定数係数の作用素同士なら，多項式の積と同じように計算できる．たとえば

$$(D - \alpha)(D - \beta) = D^2 - (\alpha + \beta)D + \alpha\beta.$$

例 14．(定数係数とは限らない場合の積)． 積の微分法の公式に従って，積を計算する．たとえば，

$$D(tD) = tD^2 + D$$

である．これは，次のように確かめられる．

$$D(tD)u(t) = \big(D(t \times (Du(t)))\big) = \big((Dt)(Du(t)) + t(D(Du(t)))\big)$$

$$= \big((Du(t)) + t(D^2u(t))\big) = (tD^2 + D)u(t)$$

他方，$(tD)D = tD^2$ だから，$P = tD, Q = D$ としたとき，$PQ \neq QP$ であり，交換法則は成り立たない．

注意． D を含まない微分作用素 (たとえば $P = t$) は，掛け算作用素とよばれる．一般の作用素 Q の関数への作用と掛け算作用素との積とは，区別して考える必要がある．たとえば，$Q = D$ の場合，関数 t への作用は $Qt = Dt = 1$ であるが，掛け算作用素 $P = t$ との積 QP は $QP = tD + 1$ となる．

8.6　微分方程式と $\mathfrak{D}$-加群

$\mathfrak{D}$-加群とは，$\mathfrak{D}$ が作用する加群の層である (第 7 章参照)．

U を $\mathbb{C}$ の開集合とし，U 上の線形常微分作用素 $P(t, D) \in \mathfrak{D}(U)$ の作る斉次微分方程式

$$P(t, D)u(t) = 0$$

に対して，次のような $\mathfrak{D}$-加群 $\mathfrak{M}$ を対応させる．

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{D}/\mathfrak{D}P.$$

容易に確認できるように，$\mathfrak{M}$ は左 $\mathfrak{D}$-加群になる．左加群と同様に右加群も考えられるが，この章では左 $\mathfrak{D}$-加群しか登場しないので，ただ $\mathfrak{D}$-加群といえば左加群を指すこととする．同様に，$\mathfrak{D}$-準同型，$\mathfrak{D}$-同型などの用語も左からの作用に関するものとする．

さらに詳しく言えば，$\mathfrak{M}$ は U 上の層 (対応 $U \supset V \mapsto \mathfrak{D}(V)/\mathfrak{D}(V)P$) であり，$\mathfrak{D}_U$-加群と言うべきだが，定義域 U は特に問題となる場合を除いて省略する．

$\mathfrak{D}$ における単位元 1 の $\mathfrak{M}$ における像を $\bar{1}$ とすると，$\mathfrak{M} = \mathfrak{D}\bar{1}$ である．また，$\mathfrak{D}P$ は $\bar{1}$ に自明に作用するので $P(t, D)\bar{1} = 0$ である．この $\bar{1}$ は関数ではないが，$P(t, D)u(t) = 0$ との類似性から，$\bar{1}$ を大胆に u と書いてしまおう．すると，

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{D}u$$

と表せる．ただし，$Qu \in \mathfrak{M}$ に対し，$\mathfrak{D}$ の元 R は $Qu \mapsto (RQ)u$ と作用する．また，$Qu = 0$ であることは，$Q \in \mathfrak{D}P$ と同値，すなわち，ある $R \in \mathfrak{D}$ を用いて $Q = RP$ と表せることと同値である．この意味で，方程式 $Pu = 0$ は，$\mathfrak{M}$ の生成元 u の基本関係式とみなすことができる．

より一般に，l 個の未知関数 $u_1, \cdots, u_l$ に関する m 個の斉次方程式からなる連立微分方程式

$$\sum_{k=1}^{l} P_{jk}u_k = 0, \quad (j = 1, 2, \cdots, m)$$

に対し，(j, k)-成分を P_{jk} とする (m, l)-行列を P として，$\mathfrak{D}$-加群

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{D}^l/\mathfrak{D}^m P$$

を対応させる．($\mathfrak{D}^l$, $\mathfrak{D}^m$ 等は横ベクトルの集合とみなしている．) l 次の基本ベクトル $(1, 0, \cdots, 0), \cdots, (0, \cdots, 0, 1)$ の $\mathfrak{N}$ における像を $u_1, \cdots, u_l$ とすれば，

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{D}u_1 + \cdots + \mathfrak{D}u_l$$

と表せる．つまり $u_1, \cdots, u_l$ は $\mathfrak{N}$ の生成系で，その基本関係式は方程式と同じ $\sum_{k=1}^{l} P_{jk}u_k = 0$ $(\forall j)$ である．実際，$\sum_k Q_k u_k = 0$ は左辺が $\sum_k P_{jk}u_k$ の $\mathfrak{D}$-係数 1 次結合で書けることと同値であるから，ある微分作用素の組 $R_1, \cdots, R_m$ を用いて $[Q_1, \cdots, Q_l] = [R_1, \cdots, R_m]P$ と表されることと同値になる．

このことは，偏微分方程式でも同様で，P を偏微分作用素 (の行列)，u や u_k を多変数の未知関数 (のベクトル) として，(連立) 斉次偏微分方程式 $Pu = 0$ に対し，それに対応する $\mathfrak{D}$-加群が定義され，$\mathfrak{D}^l/\mathfrak{D}^m P$ と同型になる．

このように，(局所的に) $\mathfrak{D}^l/\mathfrak{D}^m P$ と表される $\mathfrak{D}$-加群を，連接 $\mathfrak{D}$-加群という (以下では「連接」という言葉を繰り返さないが,「$\mathfrak{D}$-加群」と言えば，断らない限り連接 $\mathfrak{D}$-加群を指す)．

いくつか，簡単な例を見ていこう．

例 15. $(D-1)u = 0$ という常微分方程式に対応する $\mathfrak{D}$-加群は，

$$\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{D}u = \{(b_0(t)D^n + \cdots + b_{n-1}(t)D + b_n(t))u\}$$

である．u の基本関係式 $(D-1)u = 0$ から，$Du = u$ なので，$D^n u = u$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ がわかる．したがって，$\mathfrak{M}_1$ の要素は $b_0(t)u + \cdots + b_n(t)u = b(t)u$ の形に書ける．$b(t)u$ に対する $\mathfrak{D}$ の元の作用を考えよう．掛け算作用素 $a(t)\cdot$ は $bu \mapsto a(bu) = (ab)u$，D は $bu \mapsto D(bu) = (Db)u + b(Du) = (b+b')u$ のように作用するので，

$$\mathfrak{M}_1 = \{b(t)u\}, \quad a(bu) = (ab)u,\ D(bu) = (b+b')u$$

によって $\mathfrak{M}_1$ は完全に記述される．

また，方程式 $(D-2)v = 0$ に対して，同様に対応する $\mathfrak{D}$-加群 $\mathfrak{M}_2$ を考えると，$D^n v = 2^n v$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ が導かれ，

$$\mathfrak{M}_2 = \{c(t)v\}, \quad a(cu) = (ac)u,\ D(cv) = (2c+c')v$$

となる．

これら 2 つを，$\varphi\colon \mathfrak{M}_1 \to \mathfrak{M}_2$, $\varphi(bu) = (be^{-t})v$ で対応させてみると，

$$\begin{array}{ccccc} bu & \mathfrak{M}_1 & \xrightarrow{D} & \mathfrak{M}_1 & (b+b')u \\ \downarrow & {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} & \downarrow \\ (be^{-t})v & \mathfrak{M}_2 & \xrightarrow{D} & \mathfrak{M}_2 & ((b+b')e^{-t})v \end{array} \tag{8.5}$$

の図式の可換性 $(\varphi(D(bu)) = D\varphi(bu))$，および，掛け算作用素 a についての同様の性質 $(\varphi(a(bu)) = a\varphi(bu))$ から，φ は $\mathfrak{D}$-加群層の準同型写像であり，逆対応 $cv \mapsto (be^t)u$ が存在することから，同型写像であることがわかる．したがって，$\mathfrak{M}_1$ と $\mathfrak{M}_2$ は，$\mathfrak{D}$-加群として同じものと見なせる．

例 16.　$(D^2 - 3D + 2)u = 0$ という方程式に対応する $\mathfrak{D}$-加群 $\mathfrak{M} = \mathfrak{D}u$ を考えよう．$D^2u = 3Du - 2u$ なので，$\mathfrak{M}$ の要素は $aDu + bu$ と書けるし，$aDu + bu$ への D の作用は

$$\begin{aligned} D(aDu + bu) &= aD^2u + a'Du + bDu + b'u \\ &= (3a + a' + b)Du + (-2a + b')u \end{aligned}$$

と書ける．つまり

$$\mathfrak{M} = \{aDu + bu\}, \quad D(aDu + bu) = (3a + a' + b)Du + (-2a + b')u$$

である．

また，連立方程式

$$(D-1)v_1 = 0, \quad (D-2)v_2 = 0$$

は，$\mathfrak{D}$-加群 $\mathfrak{N} = \mathfrak{D}v_1 + \mathfrak{D}v_2$ を定め，

$$\mathfrak{N} = \left\{ cv_1 + dv_2 \right\}, \quad D(cv_1 + dv_2) = (c' + c)v_1 + (d' + 2d)v_2$$

となる．

これら 2 つを，$\varphi\colon \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$, $\varphi(aDu + bu) = -(a+b)v_1 + (2a+b)v_2$ で対応させて，図式

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{M} & \xrightarrow{D} & \mathfrak{M} \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} \\ \mathfrak{N} & \xrightarrow{D} & \mathfrak{N} \end{array}$$

を考えると，

$$\begin{aligned} \varphi(D(aDu + bu)) &= \varphi((3a + a' + b)Du + (-2a + b')u) \\ &= -(a + a' + b + b')v_1 + (4a + 2a' + 2b + b')v_2, \\ D(\varphi(aDu + bu)) &= D(-(a+b)v_1 + (2a+b)v_2) \\ &= -(a' + b' + a + b)v_1 + (2a' + b' + 4a + 2b)v_2, \end{aligned}$$

であるから可換になる．掛け算作用素についても同様なことが言えて φ は $\mathfrak{D}$-準同型写像であることがわかり，逆写像も存在するので同型写像あることがわかる．したがって，$\mathfrak{M}$ と $\mathfrak{N}$ は $\mathfrak{D}$-加群として同じものと見なせる．

例 17.　$D^2u = 0$ という方程式に対応する $\mathfrak{D}$-加群 $\mathfrak{M} = \mathfrak{D}u$ を考えよう．$D^2u = 0$ なので，$D^2u = D^3u = \cdots = 0$ である．したがって，$\mathfrak{M}$ の要素は $aDu + bu$ の形に書けるし，$aDu + bu$ に対する D の作用は

$$D(aDu + bu) = a'Du + aD^2u + b'u + bDu = (a' + b)Du + b'u$$

となる．つまり

$$\mathfrak{M} = \{aDu + bu\}, \quad D(aDu + bu) = (a' + b)Du + b'u$$

である．また，連立方程式

$$Dv_1 = 0, \quad Dv_2 = 0$$

は，$\mathfrak{D}$-加群 $\mathfrak{N} = \mathfrak{D}v_1 + \mathfrak{D}v_2$ を定め，

$$\mathfrak{N} = \{\, cv_1 + dv_2 \,\}, \quad D(cv_1 + dv_2) = c'v_1 + d'v_2$$

となる．これら 2 つを，$\varphi\colon \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$, $\varphi(aDu + bu) = (a + bt)v_1 - bv_2$ で対応させて，図式

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{M} & \xrightarrow{D} & \mathfrak{M} \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} \\ \mathfrak{N} & \xrightarrow{D} & \mathfrak{N} \end{array}$$

を考えると，可換性は容易に確認できる．他の性質もこれまでと同様で，$\mathfrak{M}$ と $\mathfrak{N}$ は，$\mathfrak{D}$-加群として同じものと見なせることがわかる．

例 18.　正則関数 $a(t)$ に対して方程式 $(tD - a(t))u = 0$ に対応する $\mathfrak{D}$-加群 $\mathfrak{M} = \mathfrak{D}/\mathfrak{D}(tD - a(t))$ を考え，また $\alpha = a(0)$ として方程式 $(tD - \alpha)v = 0$ に対応する $\mathfrak{D}$-加群 $\mathfrak{N} = \mathfrak{D}/\mathfrak{D}(tD - \alpha)$ を考える．これらの加群をこれまでの例のような表現で書くのは難しい (これまでの例は $\mathfrak{O}$-加群として有限生成自由加群であった) が，$\mathfrak{M}$ と $\mathfrak{N}$ の同型を以下のように示すことができる．

$a(t) = \alpha + tb(t)$ となる正則関数 b を用い，その原始関数を 1 つ固定して，関数 $r(t) = \exp\left(\displaystyle\int b(t)\, dt\right)$ と定義する．すなわち r は $Dr = br$ をみたし，値 0 をとらない関数である．そして $\varphi\colon \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ を

$$\varphi\colon Qu \mapsto Qrv$$

と定めたい．もし $Q = Q' \times (tD - a)$ ならば Qrv は $Q'(tD - a)(rv)$ となるが，

$$\begin{aligned}(tD - a)(rv) &= (tDr)v + r(tDv) - arv = tbrv + r(\alpha v) - arv \\ &= (\alpha + tb - a)rv = 0\end{aligned}$$

なので φ は矛盾なく定義されている．定義ができれば φ が $\mathfrak{D}$-準同型であることはすぐわかる．また $\psi\colon \mathfrak{N} \to \mathfrak{M}$ を $Qv \mapsto Qr^{-1}u$ と定義できて，ψ が $\mathfrak{D}$-準同型となることも，$D(r^{-1}) = -br^{-1}$ から同様に確認でき，これらは互いに逆となる．

例 19. 正則関数 $a(t)$ に対して

$$P_a = \begin{pmatrix} tD-1 & -a(t) \\ 0 & tD \end{pmatrix}$$

とし，$\mathfrak{M}_a = \mathfrak{D}^2/\mathfrak{D}^2 P_a$ を考える．たとえば $a(t) \equiv 0$ のとき $\mathfrak{M}_0$ は方程式 $(tD-1)v_1 = 0,\, tDv_2 = 0$ に対応する $\mathfrak{D}$-加群である．$\mathfrak{M}_a$ が $\mathfrak{M}_0$ と同型かどうか，いくつかの a に対して調べよう．

$a(t)$ が定数 ($a(t) = \alpha \in \mathbb{C}$) のときは，作用素の行列 R を

$$R = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

で定めると $P_\alpha R = RP_0$ となり，$\mathfrak{D}^2$ に対して掛け算 $\cdot P_a$ は単射的であるから，2 つの行が完全な可換図式

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longleftarrow & \mathfrak{M}_\alpha & \longleftarrow & \mathfrak{D}^2 & \xleftarrow{\cdot P_\alpha} & \mathfrak{D}^2 & \longleftarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow{\cdot R} & & \downarrow{\cdot R} & & \\ 0 & \longleftarrow & \mathfrak{M}_0 & \longleftarrow & \mathfrak{D}^2 & \xleftarrow{\cdot P_0} & \mathfrak{D}^2 & \longleftarrow & 0 \end{array}$$

を得るが，中央の列 $\cdot R$ は R^{-1} が存在することから $\mathfrak{D}$-加群として同型で，蛇の補題から $\mathfrak{M}_\alpha \to \mathfrak{M}_0$ も同型であることがわかる．

$a(t) = t^2 b(t)$ ($b(t)$ は正則) という形のときは，$c(t)$ を $b(t)$ の原始関数の 1 つとして作用素の行列 R を

$$R = \begin{pmatrix} 1 & tc(t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

で定めると，

$$P_{t^2b(t)}R = \begin{pmatrix} tD-1 & t^2c(t)D \\ 0 & tD \end{pmatrix} = RP_0$$

が得られ，R^{-1} も存在するから，上と同様に $\mathcal{M}_{t^2b(t)} \cong \mathcal{M}_0$ が得られる．

$a(t) = \alpha t$ $(\alpha \in \mathbb{C}, \alpha \neq 0)$ のときは，$\mathcal{M}_{\alpha t}$ と $\mathcal{M}_0$ は同型にならない．このことを確認するために解を調べよう．ただし，今は解析的関数の解を考えることにする．$t > 0$ での $P_{\alpha t}u = 0$ の解を調べてみると，$\begin{pmatrix} C_1 t + C_2\alpha \log t \\ C_2 \end{pmatrix}$ となっている．この解を，$t = 0$ に解析的に接続するには $C_2 = 0$ でなくてはならず，$t = 0$ における解空間は $\mathbb{C}$ 上 1 次元のベクトル空間となることがわかる．一方で $P_0u = 0$ の $t = 0$ での解析的な解は $\begin{pmatrix} C_1 t \\ C_2 \end{pmatrix}$ と表すことができ，解空間は $\mathbb{C}$ 上 2 次元のベクトル空間である．後に見るように $\mathcal{D}$-加群として同型ならば解空間は同型となるはずだから，$\mathcal{M}_{\alpha t} \not\cong \mathcal{M}_0$.

例 20.　P_1, P_2 を 0 でない線形偏微分作用素として，次の可換図式を考える．

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longleftarrow & \mathcal{L} & \longleftarrow & \mathcal{D} & \xleftarrow{\cdot P_1} & \mathcal{D} & \longleftarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \cdot P_2\downarrow & & \| & & \\
0 & \longleftarrow & \mathcal{M} & \longleftarrow & \mathcal{D} & \xleftarrow{\cdot P_1P_2} & \mathcal{D} & \longleftarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longleftarrow & \mathcal{N} & = & \mathcal{N} & \longleftarrow & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & 0 & & & &
\end{array}$$

ただし，$\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}$ はそれぞれ第 1 行，第 2 行，第 1 列を完全にするように定義したとする．すると，蛇の補題から第 2 列も完全となり，$\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}$ はそれぞれ，$P_1u = 0$, $P_1P_2v = 0$, $P_2w = 0$ という方程式に対応する $\mathcal{D}$-加群，すなわち $\mathcal{L} = \mathcal{D}/\mathcal{D}P_1$, $\mathcal{M} = \mathcal{D}/\mathcal{D}P_1P_2$, $\mathcal{N} = \mathcal{D}/\mathcal{D}P_2$ となる．こうして 3 つの

$\mathfrak{D}$-加群の完全系列

$$0 \to \mathfrak{L} \to \mathfrak{M} \to \mathfrak{N} \to 0 \tag{8.6}$$

を得る．たとえば $P_1 = D_t - cD_x$, $P_2 = D_t + cD_x$ ならば，$P_1P_2 = D_t^2 - c^2D_x^2$ となり，1 次元の波動方程式 $\mathfrak{M}$ の，作用素の因数分解に応じた，加群としての 1 階の方程式への分解を得る．

8.7 $\mathfrak{D}$-加群のコホモロジー

§8.6 では，斉次な線形微分方程式 $Pu = 0$ (P は微分作用素を成分とする (m, l)-行列) に対して，連接 $\mathfrak{D}$-加群 $\mathfrak{M} = \mathfrak{D}^l/\mathfrak{D}^m P$ を考えた．このような加群 $\mathfrak{M}$ は，完全系列

$$0 \leftarrow \mathfrak{M} \longleftarrow \mathfrak{D}^l \overset{\cdot P}{\longleftarrow} \mathfrak{D}^m \tag{8.7}$$

を持つ．これを基礎として $\mathfrak{M}$ のある種のコホモロジー群を考えよう．

今，$\mathfrak{M}$ を連接な $\mathfrak{D}$-加群，$\mathfrak{F}$ を適当な関数空間 (の層) とし，$\mathcal{E}xt^j_{\mathfrak{D}}(\mathfrak{M}, \mathfrak{F})$ がどんな意味を持つかを調べてみよう．ただし，$\mathcal{E}xt^j_{\mathfrak{D}}(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ は，$\mathcal{H}om_{\mathfrak{D}}(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ から定まる導来関手であり，また $\mathcal{H}om_{\mathfrak{D}}(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ は，層 $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ に対し層 $(V \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathfrak{D}|_V}(\mathfrak{F}_1|_V, \mathfrak{F}_2|_V))$ を対応させる関手である (第 4 章参照)．したがって，$\mathcal{E}xt^j_{\mathfrak{D}}(\mathfrak{M}, \mathfrak{F})$ は層となることに注意せよ．($\mathcal{H}om_{\mathfrak{D}}$ でなく $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{D}}$ の導来関手を考えれば $\mathrm{Ext}^j_{\mathfrak{D}}$ が得られる．$\mathrm{Ext}^j_{\mathfrak{D}}(\mathfrak{M}, \mathfrak{F})$ の計算も，$\mathfrak{M}$ が大域的に有限自由分解を持つ場合には以下の $\mathcal{E}xt^j_{\mathfrak{D}}(\mathfrak{M}, \mathfrak{F})$ の計算と同様に進めることができる．)

$\mathfrak{M}$ は完全系列 (8.7) を持つが，これは $\mathfrak{D}$ の性質から，局所的には

$$0 \leftarrow \mathfrak{M} \longleftarrow \mathfrak{D}^{l_0} \overset{\cdot P_0}{\longleftarrow} \mathfrak{D}^{l_1} \overset{\cdot P_1}{\longleftarrow} \mathfrak{D}^{l_2} \overset{\cdot P_2}{\longleftarrow} \cdots \tag{8.8}$$

に拡張される．もちろん，$l_0 = l$, $l_1 = m$, $P_0 = P$ である．P_1 は $P = P_0$ に対する代数的両立条件とよばれる．たとえば非斉次方程式

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \end{pmatrix} u = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \tag{8.9}$$

が解けるためには

$$(D_y, -D_x)\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = 0 \tag{8.10}$$

が必要条件 (かつ，この場合局所的には十分条件) となるから，(8.9) に対して (8.10) が 1 つの代数的両立条件であり，$P_0 = \begin{pmatrix} D_x \\ D_y \end{pmatrix}$ に対して $P_1 = (D_y, -D_x)$ となる．実際に，$P_1P_0 = 0$ であること，また $Q \in \mathfrak{D}^2$ が $QP_0 = 0$ をみたせば $Q = RP_1$ となるような $R \in \mathfrak{D}$ が存在することは容易に確かめられる．

話を戻して，(8.8) が大域的にあったとすれば，(8.8) に関手 $\mathcal{H}om_{\mathfrak{D}}(\,\cdot\,, \mathfrak{F})$ を施して得られる複体

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathfrak{D}}(\mathfrak{M}, \mathfrak{F}) \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathfrak{D}}(\mathfrak{D}^{l_0}, \mathfrak{F}) \xrightarrow{P_0} \mathcal{H}om_{\mathfrak{D}}(\mathfrak{D}^{l_1}, \mathfrak{F}) \\ &\xrightarrow{P_1} \mathcal{H}om_{\mathfrak{D}}(\mathfrak{D}^{l_2}, \mathfrak{F}) \xrightarrow{P_2} \cdots \end{aligned}$$

すなわち

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathfrak{D}}(\mathfrak{M}, \mathfrak{F}) \longrightarrow \mathfrak{F}^{l_0} \xrightarrow{P_0} \mathfrak{F}^{l_1} \xrightarrow{P_1} \mathfrak{F}^{l_2} \xrightarrow{P_2} \cdots$$

の初項を取り除いたもの，

$$0 \longrightarrow \mathfrak{F}^{l_0} \xrightarrow{P_0} \mathfrak{F}^{l_1} \xrightarrow{P_1} \mathfrak{F}^{l_2} \xrightarrow{P_2} \cdots$$

から $\mathcal{E}xt^*_{\mathfrak{D}}(\mathfrak{M}, \mathfrak{F})$ が定まる．その 0 次コホモロジー群は，

$$\mathcal{E}xt^0_{\mathfrak{D}}(\mathfrak{M}, \mathfrak{F}) = \mathcal{H}om_{\mathfrak{D}}(\mathfrak{M}, \mathfrak{F}) = \left\{u \in \mathfrak{F}^{l_0} \;\middle|\; P_0u = 0\right\}$$

であり，斉次方程式の解空間となる．1 次コホモロジー群は，

$$\mathcal{E}xt^1_{\mathfrak{D}}(\mathfrak{M}, \mathfrak{F}) = \frac{\left\{f \in \mathfrak{F}^{l_1} \;\middle|\; P_1f = 0\right\}}{\left\{P_0u \;\middle|\, u \in \mathfrak{F}^{l_0}\right\}},$$

であり，非斉次方程式 $Pu = f$ において，代数的両立条件をみたす f 全体と，$Pu = f$ が本当に解けるための f 全体との違いを表している．たとえば $\mathcal{E}xt^1_{\mathfrak{D}}(\mathfrak{M}, \mathfrak{F}) = 0$ であることは，代数的両立条件をみたす任意の f に対して

$Pu=f$ が局所可解であるための必要十分条件である．

なお，2 つの方程式 $P_1u=0$ と $P_2v=0$ に対して，対応する $\mathfrak{D}$-加群 $\mathfrak{M}_j=\mathfrak{D}^*/\mathfrak{D}^*P_j$ $(j=1,2)$ が同型なら，$\mathcal{H}om(\mathfrak{M}_j,\mathcal{F})$ や $\mathcal{E}xt^*(\mathfrak{M}_j,\mathcal{F})$ も同型となるはずだから，例 19 の最後の場合に見たように斉次方程式の解空間の次元が異なる場合には $\mathfrak{D}$-加群としても同型でない．

関数空間 $\mathcal{F}$ として選べるものは，実領域では解析関数の層 $\mathcal{A}$ や，第 7 章で出てきた佐藤超函数の層 $\mathcal{B}$ などが典型的であるし，シュワルツ超函数の層を考えることも多い．また複素領域では $\mathcal{F}$ として，正則関数の層 $\mathcal{O}$ を考えることが多い．ただし，関数空間 $\mathcal{F}$ には，$\mathfrak{D}$ が左から作用しないといけないので，たとえば L^p_{loc} などをそのまま使うことはできない．逆にいえば，$\mathcal{F}$ は $\mathfrak{D}$ が左から作用するようなものなら何でもよく，「関数の空間」でなくても構わない．その意味では，任意の (連接とは限らない) 左 $\mathfrak{D}$-加群を $\mathcal{F}$ として，$\mathcal{E}xt^*_{\mathfrak{D}}(\mathfrak{M},\mathcal{F})$ を考えることができる．

ところで，上記の計算通りに $\mathcal{H}om$ や $\mathcal{E}xt$ を求めるには $Pu=0$ や $Pu=f$ を解く必要があるから，方程式を加群に置き換えても何も簡単になっていないように見えるかもしれない．しかし，同値な方程式への変形を幾何学的な議論を用いて行える，とか，完全系列を用いて代数的に計算できる，など，微分方程式を加群のコホモロジー群の計算に置き換えるメリットは大きい．

たとえば，例 20 においては，$\mathfrak{L},\mathfrak{N}$ に対する $\mathcal{E}xt^j(\cdot,\mathcal{F})$ の情報から，長完全列を用いて，$\mathfrak{M}$ の情報を知ることができる．具体的に，例 20 の後半にある 1 次元の波動方程式の場合に計算してみよう．$\mathcal{F}=\mathcal{A}$, $\mathcal{F}=\mathcal{B}$ の場合には，1 階方程式の解析から，$\mathcal{E}xt^j(\mathfrak{N},\mathcal{F})=\mathcal{E}xt^j(\mathfrak{L},\mathcal{F})=0$ $(j\geqq 1)$ がわかるので，(8.6) から得られる長完全列

$$\begin{aligned}0\to\mathcal{H}om(\mathfrak{N},\mathcal{F})&\to\mathcal{H}om(\mathfrak{M},\mathcal{F})\to\mathcal{H}om(\mathfrak{L},\mathcal{F})\\ &\to\mathcal{E}xt^1(\mathfrak{N},\mathcal{F})\to\mathcal{E}xt^1(\mathfrak{M},\mathcal{F})\to\mathcal{E}xt^1(\mathfrak{L},\mathcal{F})\to\cdots\end{aligned}$$

を用いると，$\mathcal{E}xt^j(\mathfrak{M},\mathcal{F})=0$ $(j\geqq 1)$ が得られる．また，0 次コホモロジーについては，1 階方程式の解析から，

$$0\to\mathcal{H}om(\mathfrak{N},\mathcal{F})\xrightarrow{\imath}\mathcal{H}om(\mathfrak{M},\mathcal{F})\xrightarrow{\jmath}\mathcal{H}om(\mathfrak{L},\mathcal{F})\to 0,$$
$$\mathcal{H}om(\mathfrak{N},\mathcal{F})=\left\{w(t,x)\;\middle|\;(D_t+cD_x)w=0\right\}=\left\{h(x-ct)\;\middle|\;h\text{ は任意関数}\right\}$$

$$\mathcal{H}om(\mathfrak{L}, \mathfrak{F}) = \{u(t,x) \mid (D_t - cD_x)u = 0\} = \{f(x+ct) \mid f \text{ は任意関数}\}$$
$$\mathcal{H}om(\mathfrak{M}, \mathfrak{F}) = \{g_1(x-ct) + g_2(x+ct) \mid g_1, g_2 \text{ は任意関数}\}$$
$$\imath = \mathrm{id}\colon h(x-ct) \mapsto h(x-ct),$$
$$\jmath = D_t + cD_x\colon g_1(x-ct) + g_2(x+ct) \mapsto 2cg_2'(x+ct),$$

がわかる．

今まで紹介した微分方程式と関連しては，次のようなことが知られている．

(I) P が m 階の常微分作用素で，$P = D^m + ((m-1)$ 階以下の項$)$，という形ならば，微分方程式 $Pu = 0$ に対応する $\mathfrak{D}$-加群は，$D^m u = 0$ の作る $\mathfrak{D}$-加群と同型になる．つまり，$D^m u = 0$ を解析するだけで，$Pu = 0$ のコホモロジー的な性質がすべてわかる．このことから次のような結果が得られる．

(1) $\mathcal{H}om_{\mathfrak{D}}(\mathfrak{M}, \mathcal{A}) = \mathcal{H}om_{\mathfrak{D}}(\mathfrak{M}, \mathcal{B})$ であり，斉次方程式 $Pu = 0$ の解はすべて解析的である．またこれらの次元は m であり，$Pu = 0$ の一般解の自由度も m である．

(2) $\mathcal{E}xt^1_{\mathfrak{D}}(\mathfrak{M}, \mathcal{A}) = \mathcal{E}xt^1_{\mathfrak{D}}(\mathfrak{M}, \mathcal{B}) = 0$ となり，非斉次方程式 $Pu = f$ はいつでも解をもつ．

この場合には，考えている開集合が単連結であれば Hom, Ext^1 についても同様のことが成り立つ．

なお，$P = D_t^m + ((m-1)$ 階以下の項$)$ という偏微分作用素の場合には，$\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{D}/\mathfrak{D}P$ は $\mathfrak{M}_2 = \mathfrak{D}/\mathfrak{D}D_t^m$ と同型になるとは限らない．しかし，$\mathcal{A}$ 解や $\mathcal{B}$ 解を考える限り，無限階微分作用素を考えることによって，$Pu = 0$ と $D^m u = 0$ の解はコホモロジー的に同じものであることが知られている．つまり，任意の $i \geqq 0$ に対し，

$$\mathcal{E}xt^i_{\mathfrak{D}}(\mathfrak{M}_1, \mathcal{A}) \cong \mathcal{E}xt^i_{\mathfrak{D}}(\mathfrak{M}_2, \mathcal{A}),$$
$$\mathcal{E}xt^i_{\mathfrak{D}}(\mathfrak{M}_1, \mathcal{B}) \cong \mathcal{E}xt^i_{\mathfrak{D}}(\mathfrak{M}_2, \mathcal{B}).$$

(II) P がオイラー型の m 階常微分作用素の場合，微分方程式 $Pu = 0$ と $D^m u = 0$ に対応する $\mathfrak{D}$-加群をそれぞれ $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ とするとき，$t \neq 0$ であれば，の点 t における茎 (ストーク) は同型で，$\mathfrak{M}_t \cong \mathfrak{N}_t$ である．$t = 0$ での状況は，

(1) 佐藤超函数の空間 $\mathcal{B}$ で解を考えると，0 におけるストーク $\mathcal{H}om_{\mathfrak{D}}(\mathfrak{M},$

$\mathfrak{B})_0$ は $2m$ 次元，$\mathcal{E}xt^1_{\mathfrak{D}}(\mathfrak{M}, \mathfrak{B})_0 = 0$ である．つまり，$Pu = 0$ の一般解は自由度 $2m$ で，$Pu = f$ は常に解ける．

(2) $\mathcal{H}om_{\mathfrak{D}}(\mathfrak{M}, \mathcal{A})_0$ と $\mathcal{E}xt^1_{\mathfrak{D}}(\mathfrak{M}, \mathcal{A})_0$ は，P 次第で変わるが，その次元は常に一致する．特に，$Pu = f$ がどの f に対しても解ければ，$Pu = 0$ の解は $u = 0$ しかない．

8.8 最後に

$\mathfrak{D}$-加群は特に偏微分方程式を考えるときに強力である．ここまでに述べてきた範囲でも，(偏) 微分方程式を直接扱うのに比べて，

- 斉次方程式 $Pu = 0$ と非斉次方程式 $Pu = f$ を同時に考えることができる．
- 個別の線形微分作用素 P と個別の関数空間に対して解析するのでなく，$\mathfrak{D}$-加群 $\mathfrak{D}/\mathfrak{D}P$ をまず解析し，より簡単な方程式に帰着してから，個別の関数空間ごとに解析すればよい．
- $\mathfrak{D}$-加群として完全系列を用いてより簡単な $\mathfrak{D}$-加群への分解ができれば，簡単な方程式の解析と図式の追いかけで，元の方程式の解析が可能となる場合がある．

等の利点があった．

今回は $\mathfrak{D}$-加群に対して関手 $\mathcal{H}om_{\mathfrak{D}}(\,\cdot\,, \mathfrak{F})$ とその右導来関手を施し (て，コホモロジー群を考え) たが，様々な関手を施すことで，$\mathfrak{D}$-加群や解の情報を取り出したり，新たな $\mathfrak{D}$-加群を構成したりすることができる．線形偏微分方程式の初期値問題や境界値問題など，さまざまな問題も，$\mathfrak{D}$-加群の言葉で定式化されている．他にも擬微分作用素の理論，層の超局所化の理論など，$\mathfrak{D}$-加群の理論と同時に用いることのできる道具が揃ってきている．

参考文献

[1] 大阿久俊則『D 加群と計算数学』，朝倉書店，2002.
[2] 柏原正樹『代数解析概論』, 岩波書店, 2000.
[3] 谷崎俊之，堀田良之『D 加群と代数群』，シュプリンガー・フェアラーク東京，1995.

索引

●ア行

アフィン代数多様体　105
アーベル圏　83
アンプル　116
位相多様体　26–28
イデアル　78
因子 (代数多様体の)　113
ヴェイユ予想　126
エタール　132
エタール・コホモロジー　132–136
エタール被覆　135
オイラー数　7, 114
オイラーの法則　10
オイラー・ポアンカレの定理　7

●カ行

開集合　27
階数　(21–23)
外微分　59
可換環　77
可換図式　83
加群　31, **77–78**
カップ積　51
カテゴリー　83
可微分多様体　58–59
加法群　19, 31
カルタンの定理 B　152
ガロア・コホモロジー　138
環　31, **77**
還元　132
関手　84
完全関手　84
完全系列　48, **81–82**
逆極限　135
境界サイクル　40
境界作用素　35, 39
共変関手　84
局所環　106
局所座標　59
極大イデアル　105
クラインの壷　23
クルル次元　106
グロタンディーク位相　132
群　(18–19), 31
群環　138
形式的羃級数環　106
計量　97
ケーラー計量　99
ケーラー多様体　99
圏　83
構造層　108
合同ゼータ関数　126
コホモロジー次元　89
コホモロジー複体　51, 80
コンパクト　29

●サ行

サイクル　13–24, 39
座標環　105
座標近傍　59

ザリスキー位相　130
三角形分割　37
次元　28, 31
射影代数多様体　104
射影的加群　87
射影的極限　135
射影的分解　87
射影平面　103
写像　33
自由部分　90
種数　(12), 29, (44), 115
準同型写像　33, **79**
商　32
消滅定理　116
剰余系　32
剰余類　32
スキーム　110–111, 130–132
ストークスの定理　63–66
ストーク　108, 149
スペクトル系列　94–96
整域　105
正則関数の芽　106
正則局所環　107
ゼータ関数　125
絶対ガロア群　122
切断　150
ゼロ因子　105
線形空間　31, **78**
素イデアル　104
層　108, 148
双対空間　50
素体　121

●タ行

体　31, **77**
大域次元　89
代数曲線　102
代数閉体　120
代数閉包　120
楕円曲線　122
多項式環　77
短完全系列　81
単項イデアル　78
単射的加群　85–88
単射的分解　86–88
単体　6, **36**
単体的複体　39
単体分割　6, 37
チェックコホモロジー　154
超関数　144–147, 151–159
長完全系列　92
超平面　111
調和　101, 166
直和　31
定義関数 (超関数の)　145
テイト加群　137
デルタ関数　142–143, 146, 158
テンソル積　89–90
同型　33, 79
同型写像　33, 79
同相　4
特異単体　45
特異点　104
特異ホモロジー群　46
トポス　132
トーラス　10, 122
ド・ラームコホモロジー群　68
ド・ラームの定理　72

●ナ行

軟弱　150

軟弱分解　150

2 重複体　93

ねじれ部分　90

●ハ行

貼り合わせ　27

半完全関手　84

反変関手　84

非可換環　77

左導来関手　87

左半完全共変関手　84

左半完全反変関手　85

微分形式　60–66

微分作用素　170

標準因子　113

標数　120

複素近傍　144

複素多様体　99

複体　39, 80

不分岐　133

普遍係数定理　51

フロベニウス写像　121

閉曲面　29

平坦　132

ベクトル空間　31, **77–78**

ベッチ数　25, 55

ヘビサイド関数　143

蛇の補題　83

偏導関数　166

ポアンカレの双対定理　53

ポアンカレ・ホップの定理　56

胞体分割　42

ホッジ予想　102

ホッジ理論　101–102

ホモトピー　16

ホモトピータイプ　46

ホモトピー同値　46

ホモロガス　15–17, 40

ホモロジー群　40–41

ホモロジー複体　51, 80

ホモロジー類　40

●マ行

マイヤー・ヴィートリス完全系列　48

右導来関手　86

向き　(23–24), 33–35

向き付け　28–29, 52, (62)

無限遠点　103

芽　149

メビウスの帯　23

面　36

●ヤ行

有理関数　106

有理関数体　106

有理写像　115

●ラ行

リーマン計量　98

リーマン予想　126

輪体　39

レフシェッツ数　55

レフシェッツの不動点公式　56

著者リスト

安藤 哲哉 (あんどう・てつや)

稲葉 尚志 (いなば・たかし)

久我 健一 (くが・けんいち)

杉山 健一 (すぎやま・けんいち)

西田 康二 (にしだ・こうじ)

大坪 紀之 (おおつぼ・のりゆき)

石村 隆一 (いしむら・りゅういち)

岡田 靖則 (おかだ・やすのり)

千葉大学理学部数学・情報数理学科,
大学院自然科学研究科　所属

コホモロジー

2002 年 7 月 20 日　第 1 版第 1 刷発行
2002 年 9 月 10 日　第 1 版第 2 刷発行

編　者　安 藤 哲 哉
発行者　林　克　行
発行所　株式会社 日 本 評 論 社
〒170-8474 東京都豊島区南大塚 3-12-4
電話 (03) 3987-8621 [販売]
(03) 3987-8599 [編集]
印　刷　三美印刷株式会社
製　本　牧製本印刷株式会社
装　幀　鈴木俊秀

© Tetsuya Ando et al. 2002　Printed in Japan
ISBN 4-535-78353-5

［新装版］
日評数学選書

ヤング図形のはなし
寺田　至／著　ISBN4-535-60135-6　2700円＋税

代数学の基礎
岩永恭雄／著　60139-9　3000円＋税

［新版］**リー環の話**
佐武一郎／著　60137-2　3800円＋税

漸近挙動入門——太鼓の形を聴くために
高橋陽一郎／著　60134-8　2500円＋税

リーマン幾何学入門
O. コヴァルスキー／著　関沢正躬／訳　60132-1　2600円＋税

線形代数
矢野健太郎／著　60131-3　3800円＋税

楕円関数入門
戸田盛和／著　60128-3　2800円＋税

行列・群・等質空間
熊原啓作／著　60129-1　2800円＋税

［新版］**微分と積分**——その思想と方法
遠山　啓／著　60130-5　3200円＋税

日本評論社　http//:www.nippyo.co.jp/